

修士論文

独立なボーズ凝縮体間の 干渉性について

東北大学大学院理学研究科

物理学専攻

石井 力重

平成十年

要旨

近年希薄中性原子気体のボーズ凝縮が実現するようになった。それを用いた興味深い実験が行われている。量子的相関の無い2つのボーズ凝縮体を用意し、それらを同じ空間に解き放ち overlap させる。その後原子の分布状況を測定する。結果はまるで2つのボーズ凝縮体間に相関があったかのように Young の実験に見られるものと似たような干渉縞を示していた。

この現象に対して私はシンプルな counter のモデルを仮定することで、量子力学の枠内で観測という行為をとらえ測定中の系の変化をユニタリーな時間発展として理論的に定式化した。一方ボーズ凝縮体の状態については初期時刻の系の特徴を反映した wave packet をモデルとして採用した。この方法を用いてこの実験を解析したところ、実験で得られた干渉縞の周期を理論的に導くことが出来た。

結論としてはボーズ凝縮して足並みのそろった粒子が多数あることがこの現象の本質ではなく、“ある位置 x で観測された原子がどちらのボーズ凝縮体から来たかは(ある場合)原理的に知ることが出来ない” という理由により、異なる観測の過程を経験する状態が最終的に同じ状態へ行き着くことが可能であり、相関のない勝手な状態に用意した2つの粒子でさえ、干渉を引き起こし得るということである。本研究の意義は独立なもの（:=量子相関の無いもの）の間にどのようにして干渉が生じるかを量子力学の枠内で明快につまびらかにしたことにある。

謝辞

本研究を行うにあたって多くの方にいろいろな形でお世話になりました。

常に思慮深い示唆をもって指導してくれた、我が指導教官の高木伸さんに心から感謝しております。学部学生の頃より4年にわたる御指導頂きました。幸せなことに充実した学生生活が送れました。有難うございました。物理学という、物のことわりを学ぶ上でのものごとの考え方、だけでなく日常においても高い理念を持ち行動されている姿勢からは、多くのことを教えていただいたように思います。

また、同じ高木グループ内の研究者、柴田絢也氏には2年間を通じてパソコンの使い方に始まり最後は、web上での資料検索にいたるまで多くの場面で助けていただきました。

物性理論の同期の研究者、奥村暁氏には本論文の内容に対し初期の頃より共に考え方を投げかけていただきました。そのことで本研究はより本質を見通せたものとなりました。

同室の泉田渉博士には、論文の書き方や学問的な理念を折にふれ、教えていただきました。

グループの仲間には普段のゼミでの意見交換を通じてお世話になりました。特に岩城善広氏はこの論文を書くにあたってのパソコン周りの整備をしていただき、また長田宏二氏には発表練習でのお手伝いをしていただきました。

1期後輩の山村統一郎氏には押し迫った時期に、プリンターの夜中の突然のトラブルにも誠意あふれる対応をしていただいたことに感謝しております。

高橋長宏氏、前島文女史には私が研究に専念できるよう、公的行事の代役をお願いして、立派に成果を収めていただきました。ありがとうございます。

同期の研究者、永井進氏、西澤賢一氏にはやはり、パソコン関係のことでの大変お世話になりました。その他の同期、岡島康雄氏、黒丸知也氏、鈴木正氏、藤枝剛志氏とも、研究に対する考え方を話し合ったり、辛さや焦りなどを励ましあうことでお互い良いものが出来たと思っています。同期のみんな、3年間、ありがとうございます。

新関駒二郎先生には、論文審査の主査になっていただき、発表練習時にも多くのサジェッションをいただきました。ありがとうございます。

安原洋先生には、論文を書く心意気というものを教えていただきました。

秘書のお二人と、図書の三浦みどりさんには、事務的なお願いをして、てきぱきと片付けて助けていただきました。

また、原稿を電子化する際には学外の友人、堀川真知子さんに精神的にも大いに助けていただきました。有難うございました。

最後に、私がこうして学生として研究に専念することを可能にしていただいた私のスポンサー、父 石井龍輔氏に最大の感謝をこの論文の完成を持って表したいと思います。義務教育終了後、10年間もの間、有難うございました。

平成11年2月17日

目次

要旨	<i>i</i>
謝辞	<i>iii</i>
目次	<i>v</i>
第1章序論	7
1.1 本研究のモチベーション	7
1.2 最近の実験（相関の無いボーズ凝縮体間の干渉実験）	7
1.4 本研究の立場	7
第2章ボーズ凝縮体のモデル	7
2.1 実験の状況のシンプルなモデル化	7
2.2 ボーズ凝縮体の初期状態のモデル	7
第3章相互作用のモデル	7
3.1 ボーズ凝縮体と COUNTER の相互作用 HAMILTONIAN	7
3.2 相互作用中の系の時間発展	7
3.3 測定された状態を表す確率振幅の定式化（M-COUNTER MODEL の定式化）	7
第4章1つのCOUNTERの場合と2つのCOUNTERの場合	7
4.1 1つのCOUNTERの場合	7
4.2 2つのCOUNTERの場合	7
第5章 $P(X_1, X_2)$ のグラフへシュミレーション結果	7
5.0 導入	7
5.1 3DPLOT	7
5.2 密度 PLOT	7
第6章2点測定の示すものと実験の関係	7
第7章まとめ なぜ相関の無いボーズ凝縮体は干渉線を生じたのか	7
第8章課題	7
付録	7
付録 A	7
付録 B	7
文献	7
追記(第9章)波数 K を 0 と見積もっても 干渉線は現れるのか？（京都での最終プレゼン原稿）	7

第1章序論

1.1 本研究のモチベーション

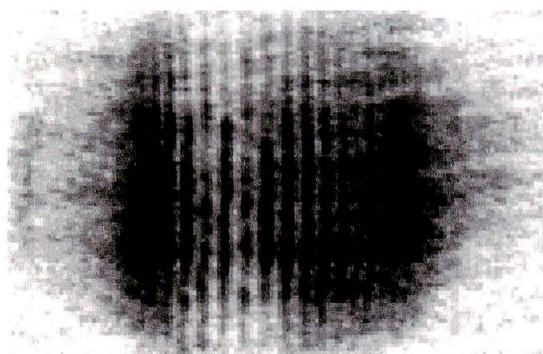
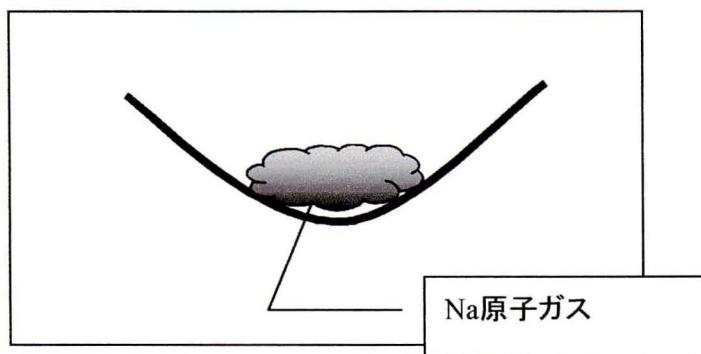


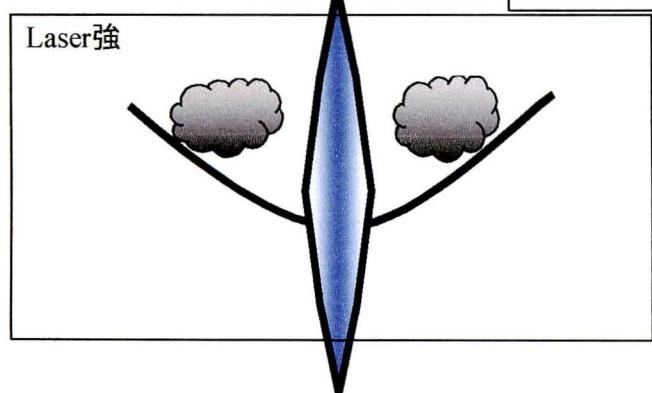
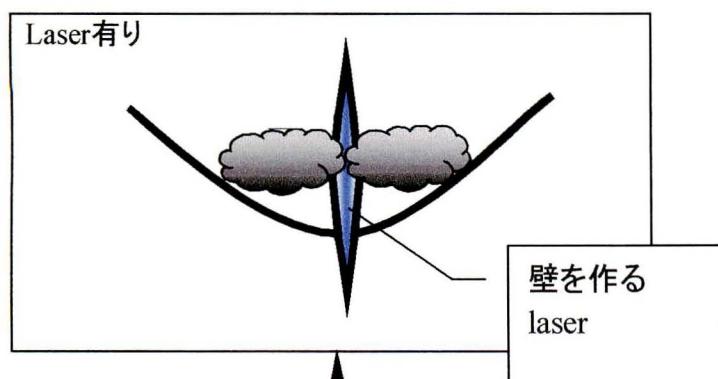
Fig.1

近年、希薄中性原子気体のボーズ凝縮が実現されるようになり、それを用いて、興味ある実験が行われている。相関も無く、いわば各々勝手に用意した2つのボーズ凝縮体の干渉実験が行われ、実際に干渉縞が生じている。量子的相関を持たぬ物の間に生じたこの干渉縞はボーズ凝縮体ならではの不思議な現象なのだろうか？

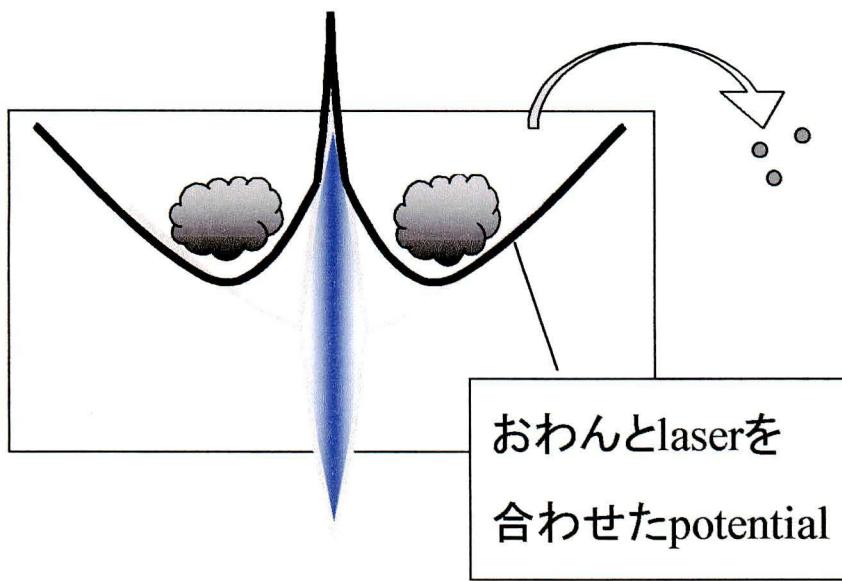
1.2 最近の実験（相関の無いボーズ凝縮体間の干渉実験）



1997年1月の SCIENCE に M. R. Andrew らによる “Observation of Interference Between Two Bose Condensates” と題した実験の論文が出された。（文献 [1]）これは次のような内容のものであった



(実験) Andrews らは磁気および光の力でつくられる2重井戸ポテンシャルをもつトラップの中に、ナトリウムの原子を入れた。それぞれの井戸のポテンシャルの形はほぼ回転楕円体で、したがって原子の雲は長軸が水平な葉巻の形をしていた。レーザー光をトラップの中央に向け、2つの凝縮体の間に薄い楕円型のシート状に焦点を結ばせるようにして、井戸を分離した。



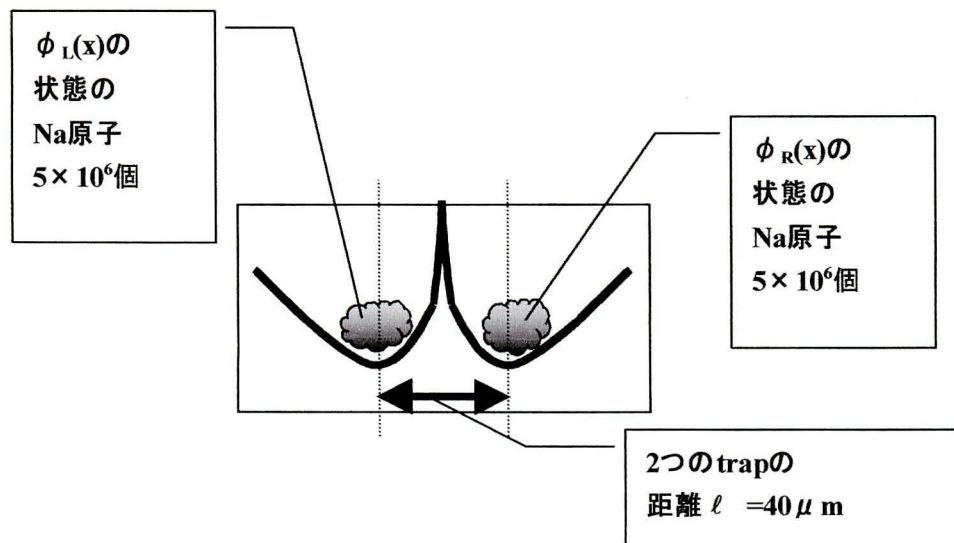
Andrews らは、蒸発冷却によって原子の雲の温度を下げた。これは、もっとも高いエネルギーをもつ原子をトラップから追い出すような振動数の高周波を照射する方法である。彼らは凝縮体をボーズ・アインシュタイン凝縮の移転温度以下に冷却し、

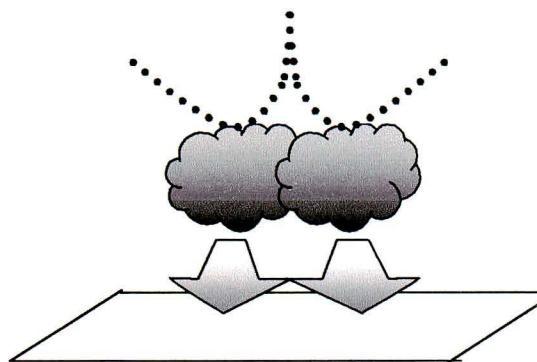
残ったほとんどすべての原子が凝縮体に含まれてしまうようにした。その結果、空間的に分離され、おのおのおよそ 500 万の原子からなる 2 つの凝縮体を得たのである。

ボーズ凝縮体の状態

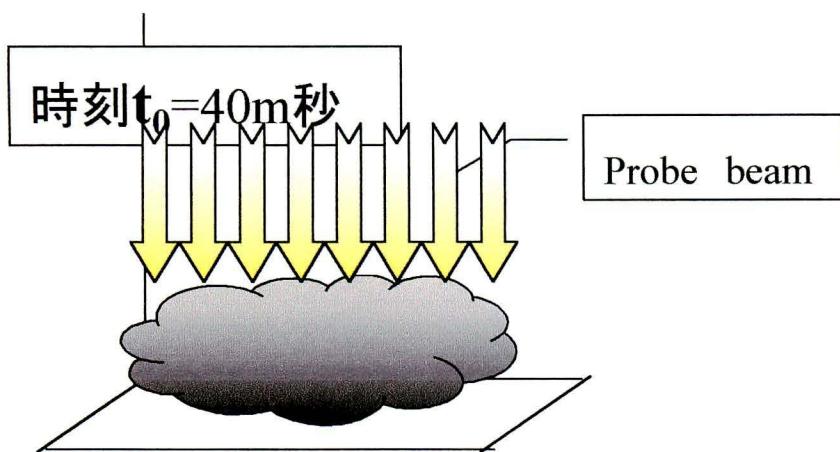
$$|N/2_L, N/2_R\rangle = \frac{1}{(N/2)!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_L(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_R(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} |0\rangle$$

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \frac{1}{(N/2)!} S \prod_{i=1}^{N/2} \phi_L(x^{(i)}) \times \prod_{i=N/2}^N \phi_R(x^{(i)})$$





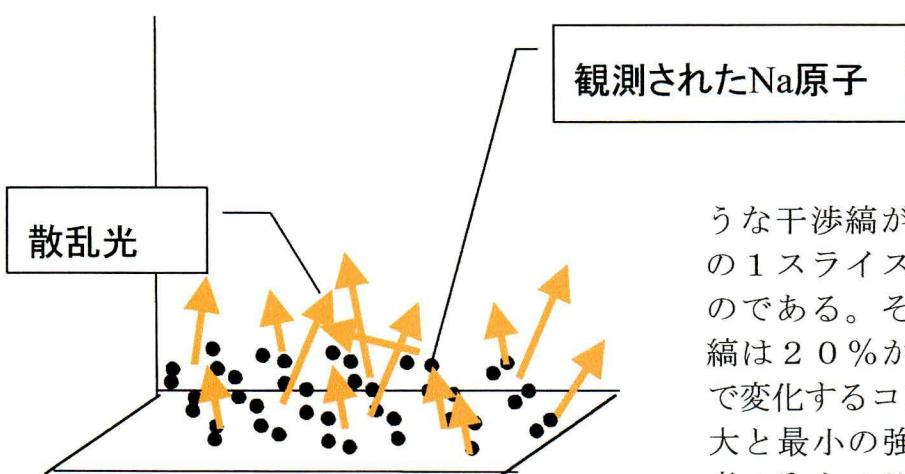
干渉縞をつくり記録するために、Andrews らはトラップのスイッチを切り、2つの凝縮体を垂直に落下させた。原子の雲を40ミリ秒自由に落下させたのち、探査光を落下する凝縮体に照射し、吸収される光量によって原子密度を測定した。



しかし、凝縮体はかなり厚い雲で、干渉縞は垂直に互いに他方の中に入り込んでいる。干渉縞は、探査光の方向が完全に干渉縞と整合していない限り、ぼやけてしまうで

あろう。

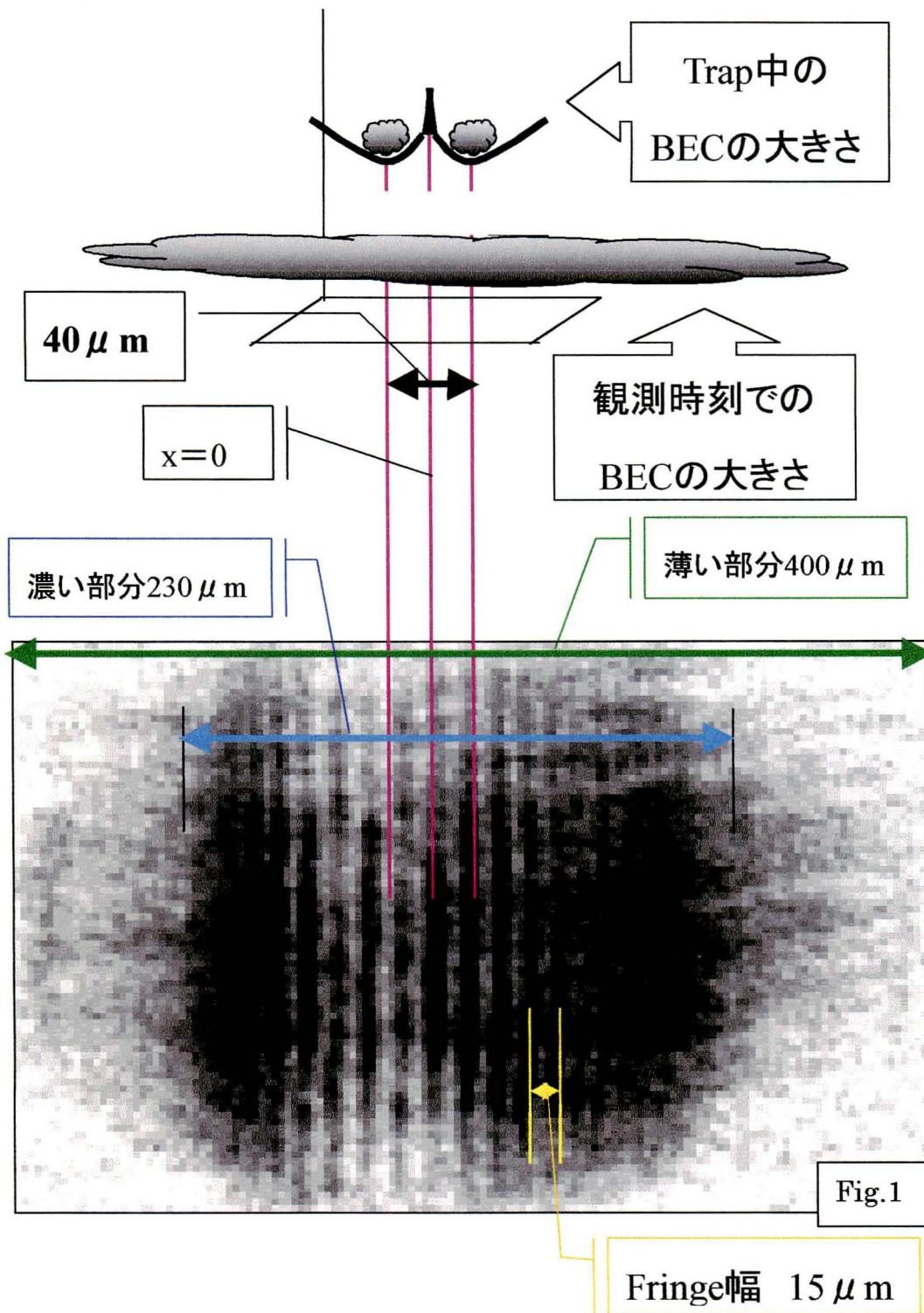
そこで、Andrews は、凝縮体を薄く水平にスライスした部分の原子 0 だけを、探査光を吸収できる状態においていた。



た。干渉縞はおよそ $15 \mu m$ の間隔をもっていた。

かくて < Fig.1 > に示したような、あたかも Young の実験のような干渉縞が、干渉する雲の1スライスから得られたのである。それでも、干渉縞は20%から40%の間で変化するコントラスト（最大と最小の強度の差と、両者の和との比）を示してい

実験結果



M.R.Andrews, et al. ; SCIENCE 275(1997)637 より転載

⇒あたかも, Youngの実験に見られるような干渉縞が現れた

1.3 この現象に対する諸説

この実験結果を説明するのに現在大きく分けて次の2つの立場がある。
以下、上田正仁氏の98年物理学会誌の論文を引用する。

① ゲージ対称性の破れ

グローバルな $U(1)$ ゲージ対称性が自発的に破れることにより BEC は位相を獲得。それにより、干渉縞が発生。獲得した位相は、実験の run ごとに全くランダムなので位相差もランダム。その結果、干渉縞の位置は2つの独立なレーザー光の干渉の場合と同様に、パルスごとに揺らぐ。

② 観測による波束の収縮

観測による波束の収縮の結果、干渉縞が現れる。測定前は各々の BEC の原子数 N_A, N_B は確定、位相は全く不確定。ある位置 X で観測された原子がどちらの BEC から来たかは原理的に知ることができないので、測定がすすむにつれ残された BEC に含まれる原子数の差は次第に不確定になり、位相差は測定結果が現れる確率を最大にする値に収束していく。

(文献 [2])

1.4 本研究の立場

私の立場は、強いて言えば先述の解釈の1つ “観測による波束の収縮” の立場である。(厳密に言えば、波束の収縮という用語を避け、

quantum measurement theory <量子力学にのっとって観測を扱う解釈> という名の立場である。)

具体的には、観測に関する言葉上の概念的議論として扱うこと避け、測定器 (counter) まで含めたスタンダードな量子力学を展開する。
測定に対応した相互作用により系がどのような時間発展を遂げるかを計算し、測定をした状態を表す確率振幅を求め、どのように干渉が生じているかを議論する。

第2章ボーズ凝縮体のモデル

2.1 実験の状況のシンプルなモデル化

(空間の次元)

3次元空間のうち、2つの trap をむすぶ向きの軸（これを x 軸とする）の1次元が本質的に、干渉を説明する機構のあると考えられる。

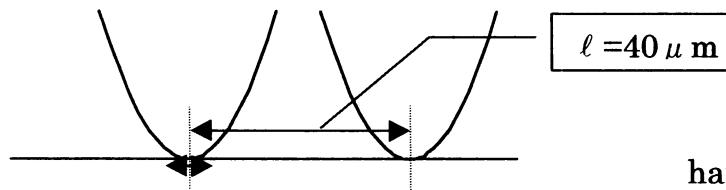
残りの2方向は、左右のボーズ凝縮体で差はほとんどなく、干渉への寄与は充分小さいと見て以降の議論では x 方向のみの1次元のモデルとする。

(原子間の相互作用)

各原子間の相互作用の効果は、この実験を行うような time scale では無視できると仮定し、原子間の相互作用を考えない。

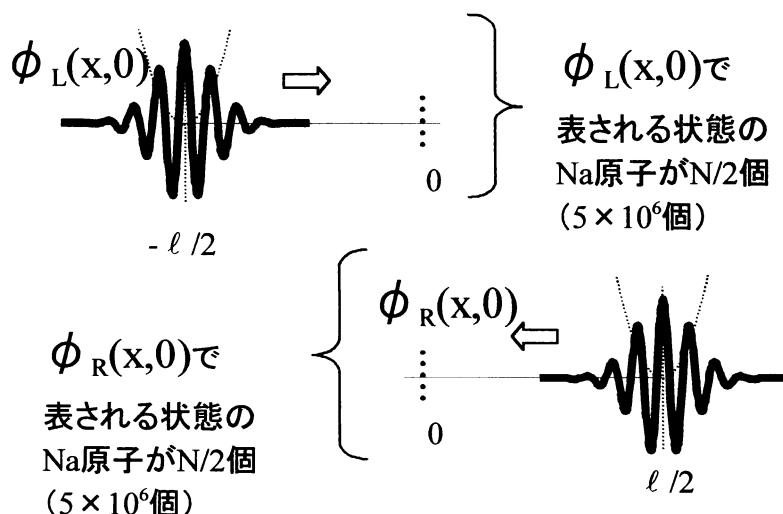
つまり trap を switch off したあとは、各々の Na 原子は Na 原子の自由な Hamiltonian で時間発展していくものだとしてモデル化する。

2.2 ボーズ凝縮体の初期状態のモデル



先に紹介した Andrews の実験での2つの trap を、次のように見積もる。各 trap の形を反映させるように曲率を決めた2つの harmonic oscillator potential が、 potential の中心間距離 $l = 40 \mu\text{m}$ だけ離れて x 軸上に配置してある。

初期時刻には、左の potential に $\phi_L(x)$ の状態の Na 原子が $N/2$ 個 trap され、右も同様に $\phi_R(x)$ の状態の Na 原子が $N/2$ 個 trap されている。trap を切った後ボーズ凝縮体は広がり overlap してゆく。



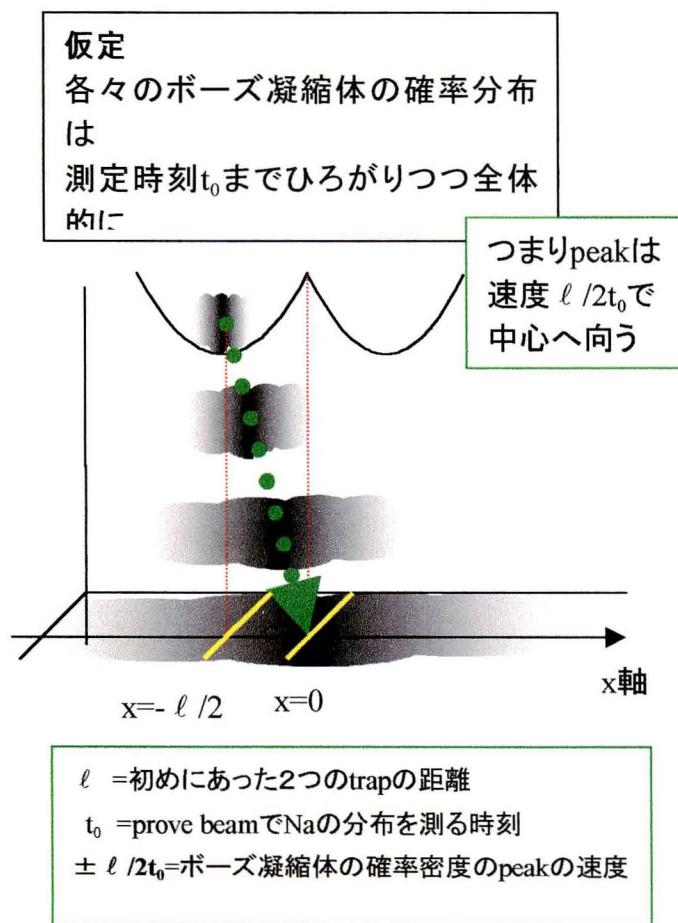
Javanainen と Yoo は以前行った仕事（文献 [3]）では実験の本質を表す最もシンプルなものとして初期状態を表すモデルとして plane wave を用いている。

本研究ではいくぶん現実味をもたせるよう、上図のようにボーズ凝縮体の広がっている程度を加味し中心に向かって進む wave packet を初期状態として採用する。具体的には以下の式。

$$\begin{aligned}
 & |N/2_L, N/2_R; 0\rangle \\
 &= \frac{1}{(N/2)!} \left(\int dx \phi_L(x, 0) \psi^\dagger(x) \right)^{N/2} \left(\int dx \phi_R(x, 0) \psi^\dagger(x) \right)^{N/2} |0\rangle \\
 \phi_L(x, 0) &= \left(2/\pi s^2 \right)^{1/4} e^{-((x+\ell/2)/s)^2} e^{ik(x+\ell/2)} \\
 \phi_R(x, 0) &= \left(2/\pi s^2 \right)^{1/4} e^{-((x-\ell/2)/s)^2} e^{-ik(x-\ell/2)}
 \end{aligned}$$

$\phi_{L,R}(x, 0)$ 中の Gaussian は

trap の形を反映するようにきめた harmonic oscillator potential の ground state であり、具体的には trap の曲率の見積もりから、その s の値は $12.1 \mu m$ と計算される。



波動関数の平均速度は互いの確率分布の peak が t_0 にちょうど一致すると見積もる。(つまり速度 = $\ell/2t_0$) ことから k の値として、

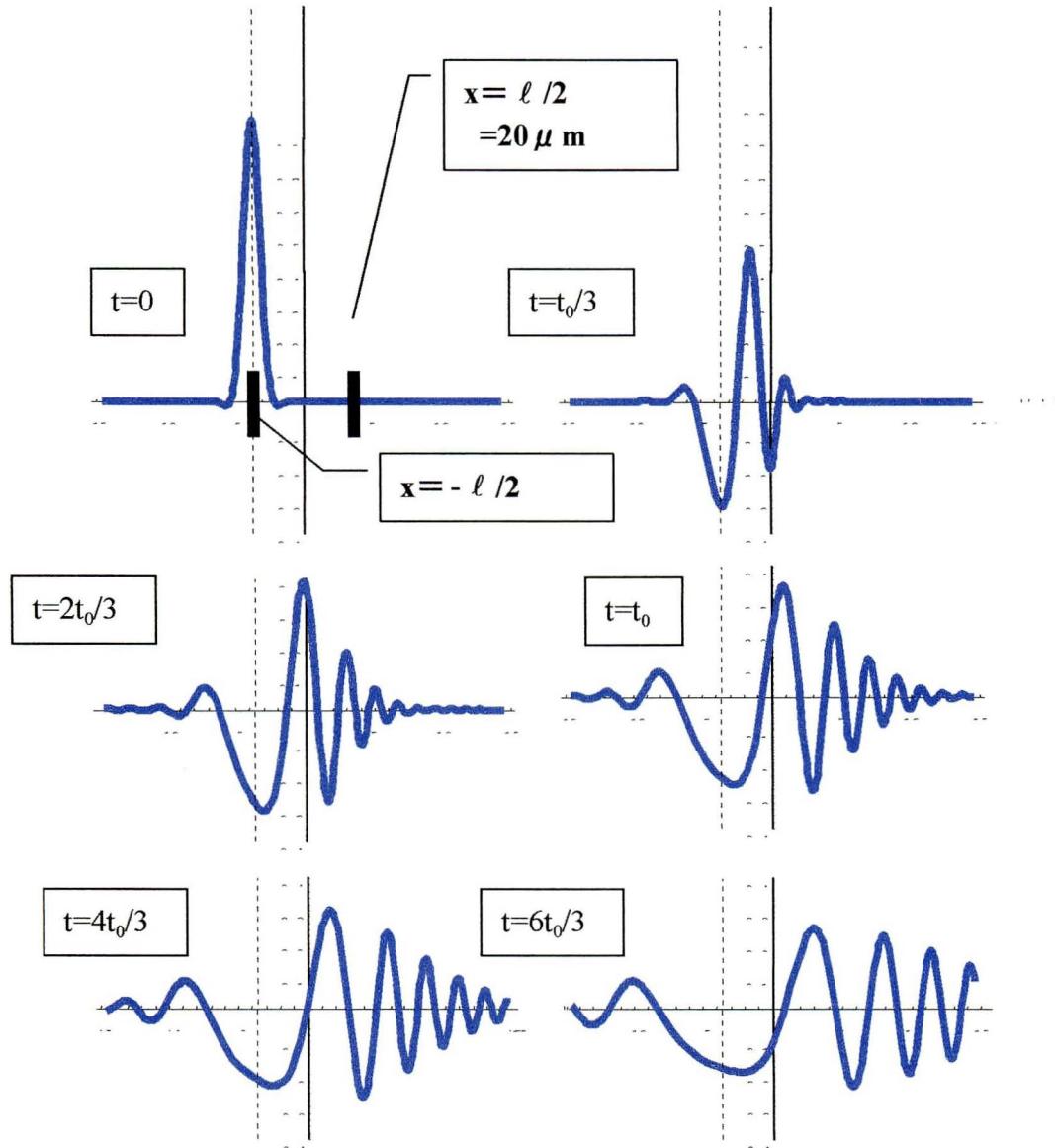
$k = m \ell/2t_0 \ hbar = 18.2 [1/\mu m]$ と与えられる。

以降の議論は、論文の最後のシュミレーションで具体的な値を用いることを除いて、こうして見積もった k の値が幾つであっても同様に成り立つ。

このように定めた初期状態は $t_0 = 40 \mu m$ まで Na 原子の自由な Hamiltonian で時間発展する。具体的には、ボーズ凝縮体の状態ケット中の各 $\phi_{L,R}(x, 0)$ を、1 粒子系の自由な Hamiltonian によって時間発展していったものになる。

参考として次のページに各波動関数の時間発展がどのように進むか見るために $\phi_L(x)$ の実成分を幾つかのサブルтайムについて Plot したものを作成しておく。

$\phi_L(x,t)$ の時間発展



$\phi_L(x,t)$ 、 $\phi_R(x,t)$ の具体式は以下

◆ $\phi_L(x,t)$

$$= \exp\left\{ \theta^2 k^2 (-2i\hbar t / ms^2) / 4(1 - 2i\hbar t / ms^2)^2 \right\} (2/\pi\theta^2)^{1/4} \exp\left\{ -([x + \ell/2]/\theta)^2 \right\} \exp(i\xi[x + \ell/2])$$

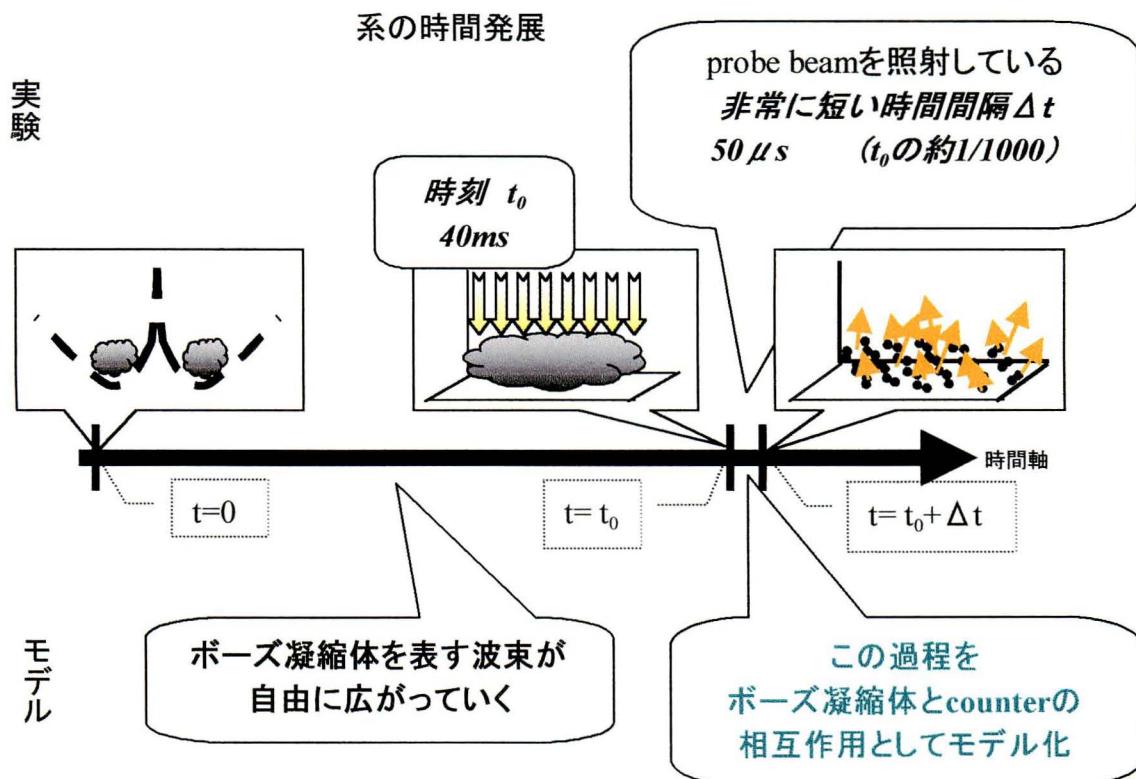
◆ $\phi_R(x,t)$

$$= \exp\left\{ \theta^2 k^2 (-2i\hbar t / ms^2) / 4(1 - 2i\hbar t / ms^2)^2 \right\} (2/\pi\theta^2)^{1/4} \exp\left\{ -([x - \ell/2]/\theta)^2 \right\} \exp(-i\xi[x - \ell/2])$$

$$\text{ただし } 1/\theta^2 = 1/s^2 (1 - 2i\hbar t / ms^2) = (1 + 2i\hbar t / ms^2) / s^2 (1 + [2\hbar t / ms^2]^2)$$

$$\xi = k / (1 - 2i\hbar t / ms^2) = k (1 + 2i\hbar t / ms^2) / (1 + [2\hbar t / ms^2]^2)$$

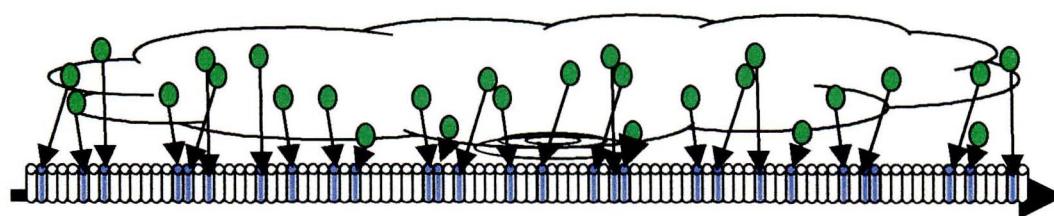
第3章 相互作用のモデル



実験では 50 μ 秒という時間を要している、probe beam を照射してから散乱光を観測するまでの過程を、x 軸上に敷き詰められた非常に多くの counter が、ボーズ凝縮体と相互作用するとしてモデル化する。

以下その定式化を与える。

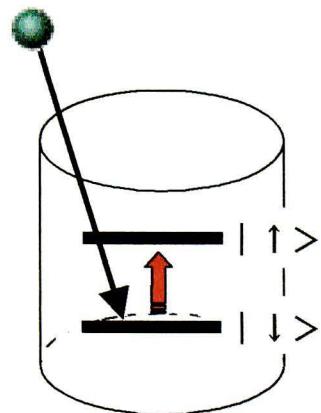
3.1 ボーズ凝縮体と counter の相互作用 Hamiltonian



- 充分細かい幅 Δx を持った counter が x 軸上に敷き詰められている。
- counter j (j 番目の counter) の中には Na 原子を 1 個吸うと $| \downarrow \rangle_j$ から $| \uparrow \rangle_j$ へ状態が flip する two state atom が 1 つ入っている。

(two level atom でも良い。本質的に変わりはない。two state atom の方が便利なのである。2 つの状態が同じエネルギー レベルであればエネルギーの原点をその レベルにとりなおす事で counter の t_0 まで時間発展の記述が無くてすむ。)
- 全ての counter ははじめ $| \downarrow \rangle$ の状態にある。

- counter は t_0 まで switch off で原子との相互作用を持たない。
- t_0 から短い時間 Δt の間だけ switch on でその間は Na 原子との時間的に一定である相互作用 \mathcal{H}_I を持つ。



- counter は two state atom
- 原子を吸って
|↓> から |↑> へ flip

これらの状況を満たす相互作用はどのようなものであるか。

まず、Na 原子を 1 個吸って counter が flip するという過程から

$$H_i \propto \sigma_{j+} \psi(x_j)$$

ただし $\sigma_{j+} = |↑>_{j+} <↓|$ と定義。

次に量子力学の構造上物理的な過程は Hermite であることが要請されるので

$$H_i \propto \sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.$$

counter は有限の幅を持つので上式は x_j を中心に Δx の区間で積分される。

しかし測る相手の関数に較べ Δx は充分幅が狭いのでその積分値は $x = x_j$ での値に

比例定数を掛けたものでよい。つまり比例定数(g と置く) がつくだけである。

$$H_i \propto g(\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.)$$

また今回のモデルでは counter が on になっている時間 Δt は非常に短いものとするのでこの相互作用には時間の短さに負けないよう $\tau / \Delta t$ のファクターを付す。(τ はこの系に特徴的な時間のスケールを持った量である。次元を合わせるためにもちいた。)

$$H_i \propto g(\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.) \frac{\tau}{\Delta t}$$

上式が Na と counter j との相互作用 Hamiltonian である。

この系に counter は複数あるので系全体としては j で和をとったものになる。

以上のことよりこの系の相互作用 Hamiltonian として以下のようにモデル化する

Na 原子と counter の相互作用 Hamiltonian \mathcal{H}_I

$$H_i \propto \sum_j g(\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.) \frac{\tau}{\Delta t}$$

3.2 相互作用中の系の時間発展

測定中の系の時間発展の演算子は測定中の Hamiltonian が時間的に一定であることから $\mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0) = \exp(-i \Delta t (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1) / \hbar)$ と形の上では簡単な式で与えられる。これを \mathcal{H}_1 の多項式（正確に言えば $\sigma_{j+} \phi(x_j)$ の多項式）へばらしたい。のまま近似を使わずそれを行うのは一般に複雑なことである。ここでは対応する実験に近い状況の近似—impulse approximation—to おこなう。実験では図のような counter に直にボーズ凝縮体が触れているわけではない。短い時間プローブビームをあてその跳ね返って来るもののデータからの像を見ている。この実際の実験を先のカウンターのモデルで表すならば、そこに出でてきた Δt が然るべき意味で非常に小さいということになる。

[Δt の小ささの然るべき意味]

ここでの充分小さい、という言葉の評価は大まかに言えば t_0 での系の期待値を用いて

$$\Delta t \langle H_0 \rangle \ll \tau \left\langle \sum_j g(\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.) \right\rangle$$

つまり、

$$\Delta t \ll \tau \left\langle \sum_j g(\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.) \right\rangle / \langle H_0 \rangle$$

をみたすほど小さいということである。

[注意] この後の節で行う近似で更に Σ の中の g が充分小さいという状況を設定するが、それを満たせるように Δt を（数学的には）更に充分小さくとれる。)

\exp の肩の中で $\Delta t \mathcal{H}_0$ の項が Δt の 1 次のオーダーであるのに対し \mathcal{H}_1 に入れておいた $1/\Delta t$ の効果から $\Delta t \mathcal{H}_1$ の項は Δt の 0 次のオーダーである。このことから Δt が充分小さいとき時間発展の演算子は

$$\mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0) \doteq \exp(-i \Delta t \mathcal{H}_1 / \hbar)$$

で近似される。これは現象として、 \mathcal{H}_0 による系の変化が、ほとんど無視できるような短い時間巾で、その分時間の少なさに応じた測定器の吸収性能で測定は有限な量として測定を行っている、ということである。（短い時間で激しい作用ゆえこの近似法は impulse approximation とよばれている。）

$c = -i g \tau / \hbar$ とおいて近似により得られたこの時間発展の演算子を c について展開しておく。

今まで略記してきた h.c. を明示すると

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0) &\doteq \exp(-i \Delta t \mathcal{H}_1 / \hbar) \\ &= \exp \{ c \sum_j (\sigma_{j+} \phi(x_j) + \sigma_{j+} \phi(x_j)^\dagger) \} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} c^s \left(\sum_j (\sigma_{j+} \psi(x_j) + h.c.) \right)^s \end{aligned}$$

これをばらして次のようにまとめ直す。

$$u(t_0 + \Delta t; t_0) = 1$$

$$+ \underbrace{\left(c^1 \sum_j \sigma_{j+} \psi(x_j) + c^3 (\psi^\dagger \psi \psi \text{ や } \psi \psi^\dagger \psi \text{ を含む項}) \right.}_{\psi \text{ の数} - \psi^\dagger \text{ の数} = 1 \text{ の項}} \\ \left. + c^5 (\psi^\dagger \psi \psi^\dagger \psi \psi \text{ や } \psi \psi \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \text{などを含む項}) + c^7 \dots \right)$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2!} c^2 \sum_{j, j'} \sigma_{j+} \sigma_{j'+} \psi(x_j) \psi(x_{j'}) \right.}_{\psi \text{ の数} - \psi^\dagger \text{ の数} = 2 \text{ の項}} \\ \left. + c^4 (\psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \text{ や } \psi \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \text{などを含む項}) \dots \dots \dots \right. \\ \left. + c^6 \dots \right)$$

+

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{n!} c^n \sum_{j, j' \dots j^{(n-1)}} \sigma_{j+} \sigma_{j'+} \dots \sigma_{j^{(n-1)+}} \psi(x_j) \psi(x_{j'}) \dots \psi(x_{j^{(n-1)}}) \right.}_{\psi \text{ の数} - \psi^\dagger \text{ の数} = n \text{ の項}} \\ \left. + c^{n+2} \text{ の項} + c^{n+4} \text{ の項} + \dots \right)$$

+

$$+ \underbrace{\left(\psi^\dagger \text{ の数} \geq \psi \text{ の数} \text{ より大きいもしくは等しい項} \right)}_{|\Psi(t_0)\rangle \text{ に作用させると } 0 \text{ になる}}$$

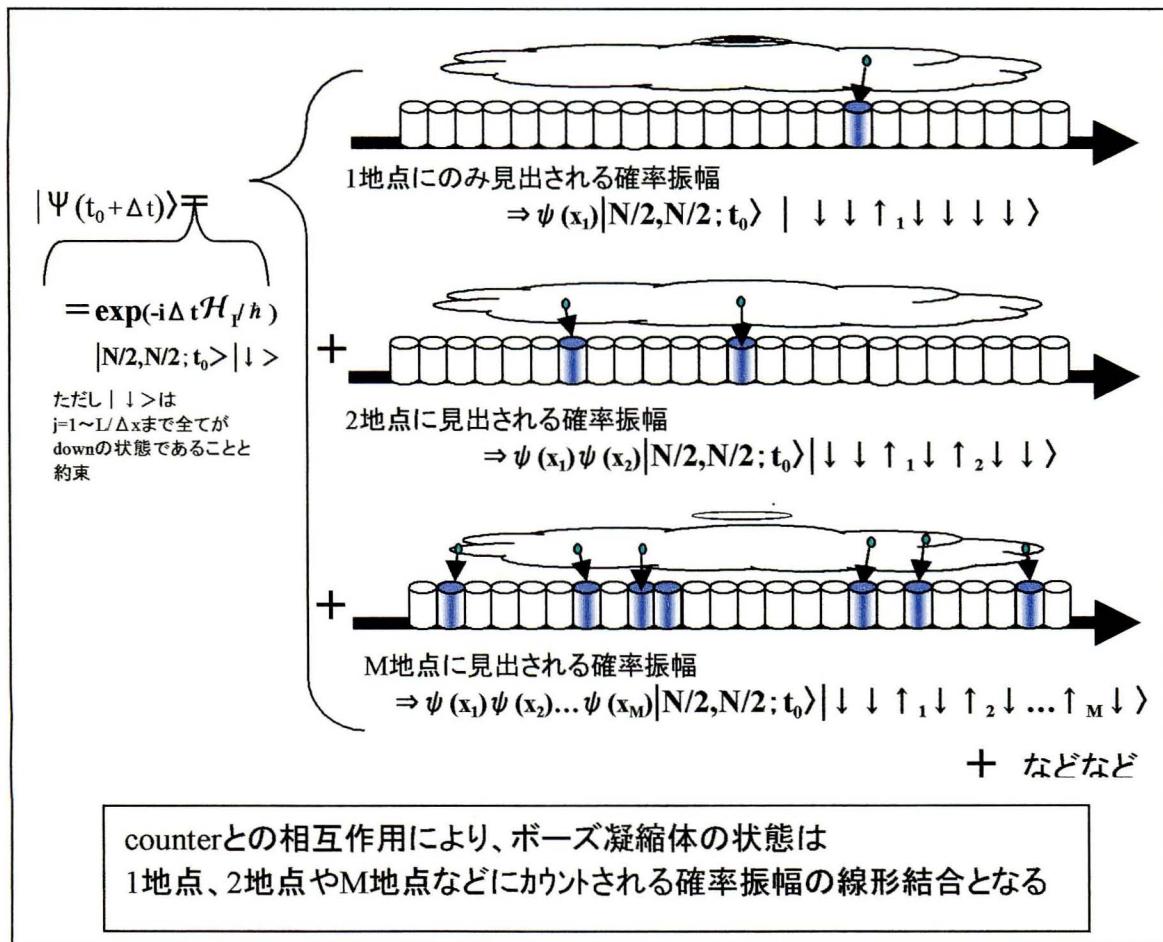
3.3 測定された状態を表す確率振幅の定式化 (M-counter model の定式化)

相互作用直前の全系の状態は

$|\Psi(t_0 + \Delta t)\rangle = \exp(-i\Delta t \mathcal{H}_p/\hbar) |N/2, N/2; t_0\rangle |\downarrow\rangle$ である。

相互作用後の系の状態は、 c について $\mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0)$ を展開したものを、相互作用直前の状態に作用させて得られる。

それは下図に示したように、何個の counter が flip したかという状態を表す確率振幅の重ね合わせになっている。これは実験の single run ごとに実際に何個検出するかがわかるということである。



M 個の counter が flip した状態を表す確率振幅 ($\mathcal{U}(t_0 + \Delta t, t_0)$ の展開式で “ $\psi(x)$ の数 - $\psi^\dagger(x)$ の数 = M” と表された項によるもの) に着目する。 c について最低次 (c^M) の項には counter が Na 原子を吸って $|\uparrow\rangle$ に flip するものばかりだが、 c の高次 (c^{M+2}, c^{M+4}, \dots) の項には $\psi^\dagger(x)$ により一度吸った Na 原子を吐き出して $|\downarrow\rangle$ に戻ってしまう過程が必ず含まれている。これにより消える前とは異なる状態の粒子が系には存在するようになってくる。これは現象的には counter が散乱を起こしているということである。counter というものは必要以上には系を乱さないように要請されるべきなので、こうした散乱を起こす項の効果は現実の counter では小さいはずである。それゆえ結合

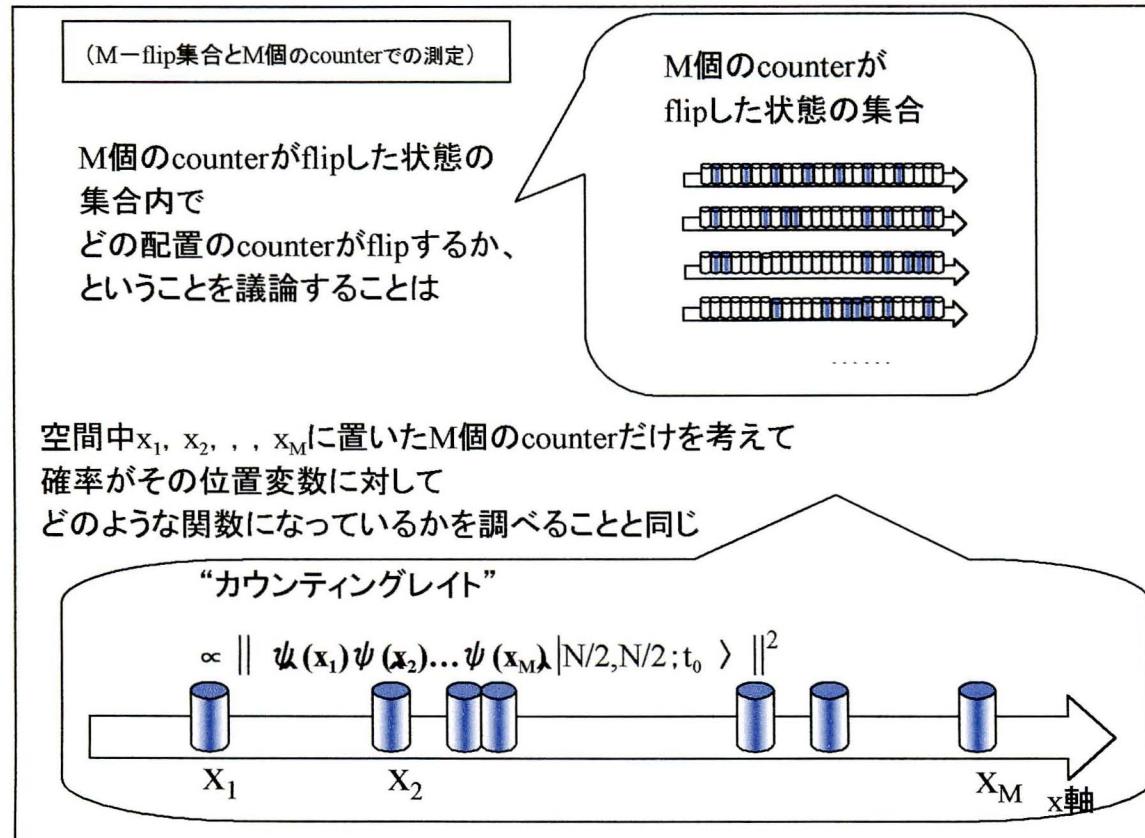
定数 c を充分に小さいものと考えて議論を進めよう。 c が小さいと M 個 flip する状態を表す確率振幅は、 M 次のオーダーで小さくなってしまうが、実験の ran を非常に多く繰り返せば c が（ひいては g が）どれほど小さくても M 個 flip する状態は現れてくる。こうして M 個の flip があったサンプルを集めてくればその集合の中に含まれる、散乱を持った状態を表す確率振幅は、散乱の無い状態を表す確率振幅に較べ c の 2 次以上小さいので無視できるようになる。（以上のように約束するとこれはちょうど相互作用 Hamiltonian の中の Hermite conjugate(h.c.)を落としたものと同じになる。）この定式化を M -counter model と呼ぶことにする。

まとめると M -counter model は x_1, x_2, \dots, x_M に Na 原子をみいだす状態のように与える。

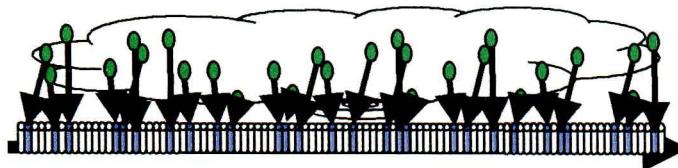
$$\psi(x_1)\psi(x_2)\dots\psi(x_M)|N/2_L, N/2_L; t_0\rangle \otimes |\dots\uparrow_1 \dots\uparrow_2 \dots\dots\uparrow_M \dots\rangle$$

(c と M に依存した係数 ($c^M / M!$) は必要無い限り省ておく)

この式から分かるように M -counter model の与える確率振幅は、空間中に M 個の counter があって、その全ての counter が粒子の検出した、という状態を表す確率振幅と同値である。以降の議論ではそのことを念頭において M -counter model の議論をする時に、 x 軸上に置いた M 個の counter 全てが粒子を検出するという状態を表す確率振幅をもって行うことにする。



第4章 1つのcounterの場合と 2つのcounterの場合



本来、実験の状況と直に対応するのは M (非常に大きい数) 個の地点でカウントされる確率振幅である。

一方、どのように干渉が生じているかを解明す

ることを、本論文は第1の目的としている。

実験では非常に多数の粒子が観測されているが、観測される数の多いことがこの現象の本質なのだろうか。そこでまず、flipするcounterの数が少ない状況で、相互作用によるボーズ凝縮体の変化を調べる。次に、ボーズ凝縮体の干渉が現れるまで、観測される数の多い状況へ進む。そして最終的に、何がこの干渉の本質的な機構となっているのかを明確にする。

4.1 1つのcounterの場合

最も簡単な状況、1つのcounterの場合をかんがえる。

有効となる相互作用 Hamiltonian は $\mathcal{H}_i = g(\sigma_{i+} \psi(x) + h.c.)$ である。

x 点に Na 原子を検出する確率振幅



を式で表せば

$$\begin{aligned} & \psi(x, t_0) \sigma_+ |N/2, N/2; t_0\rangle | \downarrow \rangle \\ & \propto (\phi_L(x, t_0) |N/2-1, N/2; t_0\rangle + \phi_R(x, t_0) |N/2, N/2-1; t_0\rangle) | \uparrow \rangle \end{aligned}$$

である。

第一項は左からのボーズ凝縮体の粒子を1つ消した状態を表す確率振幅であり、係数として時刻 t_0 での左のボーズ凝縮体の粒子1つ分の波動関数 $\phi_L(x, t_0)$ がついている。第二項は同様に右からのボーズ凝縮体のを1つ消し、波動関数 $\phi_R(x, t_0)$ が係数として出ている。

上式を用いて x 点に Na 原子を検出する確率 $P(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned} P(x) &= \|x\text{点にNa原子を検出する確率振幅}\|^2 \\ &\propto (\phi_L(x, t_0) \phi^*_{L'}(x, t_0) \langle N/2-1, N/2 | N/2-1, N/2 \rangle \\ &+ \phi_R(x, t_0) \phi^*_{R'}(x, t_0) \langle N/2, N/2-1 | N/2, N/2-1 \rangle \\ &+ \phi_R(x, t_0) \phi^*_{L'}(x, t_0) \langle N/2-1, N/2 | N/2, N/2-1 \rangle \\ &+ \phi_L(x, t_0) \phi^*_{R'}(x, t_0) \langle N/2, N/2-1 | N/2-1, N/2 \rangle) \end{aligned}$$

$$= (|\phi_L(x, t_0)|^2 + |\phi_R(x, t_0)|^2 + \lambda \phi_R(x, t_0) \phi_L^*(x, t_0) + \lambda^* \phi_L(x, t_0) \phi_R^*(x, t_0))$$

ここで λ は重なり積分と呼ばれる量で右にある状態のNa原子が左にある状態のNa原子として見出されてしまう度合、つまりどれほど相関があるかということの1つの指標。具体的には以下の式で与えられる。

$$\lambda = \int dx \phi_L^*(x, 0) \phi_R(x, 0)$$

$$= e^{-\ell^2/2 s^2 - k^2 s^2/2}$$

$$= e^{-5.46 - 2.42 \times 10} = 4.7 \times 10^{-10534}$$

(仮に k の見積もりを変えたなら、 $k=0$ のとき最も λ (の絶対値) は大きい値となり

$$\lambda = e^{-5.46} = 4.3 \times 10^{-3}$$
 となる)

$\lambda \sim 1/1000$ のオーダーを無視するなら、 $P(x)$ はただの古典的な確率の和

$$(|\phi_L(x, t_0)|^2 + |\phi_R(x, t_0)|^2)$$

である。

以上の計算から、以下のようにまとめることが出来る。

初期時刻に重なり積分 λ がほとんど大きさを持たないので干渉項は残らない。つまり通常の認識どうり、初めに量子的相関を持たぬものは、1地点のみの測定では確率分布は左のものと右のものの古典的な和として現れる。つまり、干渉は生じない。もしくは言い換えて、

1点のみの測定で見える干渉とは、

初めに用意した2つの原子の状態がoverlapを持っている場合(=相関をもっている場合)、ある1地点に観測された時にどちらから来たものだったかを原理的に言う事が出来ず、そのことにより生じた干渉なのである。

レーザーの干渉はこれが本質的に効いている。2つの装置から出されるレーザーは先程の

$\langle N/2, N/2-1 | N/2-1, N/2 \rangle$ という部分がナンバーステイトの内積ではなく、コヒーレントステイトの内積となるため、平均粒子数が多い時、Lが1つ減った状態とRが1つ減った状態は比較的大きな内積を持っている。そのため、勝手な状態に用意した2つのレーザーは、1点のみの測定をしても干渉が見えるのである。

さて、1点のみの測定では実験の干渉を反映していなかった。そこで次に1つ増やして、2点を測定した場合を考える。

4.2 2つのcounterの場合

今度のモデルでは x_1 と x_2 に counter を用意する。有効となる Hamiltonian を具体的に書けば

$$\mathcal{H}_i = g (\sigma_{1+} \psi(x_1) + h.c.) + g (\sigma_{2+} \psi(x_2) + h.c.)$$

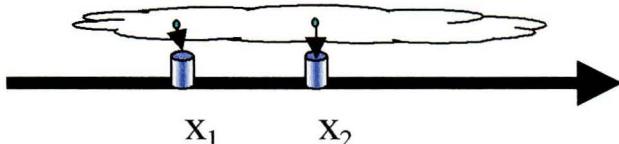
である。

また、counterを含めた測定前の状態は

$$|\Psi(t_0)\rangle = |N/2, N/2; t_0\rangle \downarrow_1 \downarrow_2 \rangle$$

という形で、2つのcounterに対応したケットが明記される。

x_1, x_2 にNa原子を検出する確率振幅



を式で表せば以下

$$\psi(x_1)\sigma_{1+}\psi(x_2)\sigma_{2+}|N/2, N/2; t_0\rangle \downarrow_1 \downarrow_2 \rangle$$

$$\propto \psi(x_1)\sigma_{1+}(\phi_L(x_2, t_0)|N/2-1, N/2; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0)|N/2, N/2-1; t_0\rangle) \downarrow_1 \uparrow_2 \rangle$$

$$\propto (\phi_L(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0)|N/2-2, N/2; t_0\rangle + \phi_L(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0)|N/2-1, N/2-1; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0)|N/2-1, N/2-1; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0)|N/2, N/2-2; t_0\rangle) \uparrow_1 \uparrow_2 \rangle$$

である。ここで第2項と3項はcounterまで含めまったく同じ状態を表す確率振幅である。

これを用いて x_1, x_2 に Na 原子を検出する確率 $P_{2\text{個検出}}(x_1 x_2)$ を計算する。

$P_{2\text{個検出}}(x_1 x_2)$ (以下では $O(\lambda), O(1/N)$ は無視して表記)

$$\propto \{ |\phi_L(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0)|^2 + |\phi_L(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0) + \phi_R(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0)|^2 + |\phi_R(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0)|^2 \}$$

これを古典的確率とそうでない部分にまとめると

$$\propto \{ |\phi_L(x_1, t_0)|^2 + |\phi_R(x_1, t_0)|^2 \} \{ |\phi_L(x_2, t_0)|^2 + |\phi_R(x_2, t_0)|^2 \}$$

$$+ \{ \phi_L(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0)\phi_R^*(x_2, t_0)\phi_L^*(x_1, t_0) + \text{c.c.} \}$$

第1項は古典的確率分布である。第2項は古典的確率分布には無い項、すなわち量子力学ならではの干渉項である。これは $|N/2-1, N/2-1\rangle$ が出所であった。以下、この干渉項の影響により2点測定の確率分布 $P(x_1, x_2)$ にどのような干渉パターンが見えるかをシミュレーションで調べる。

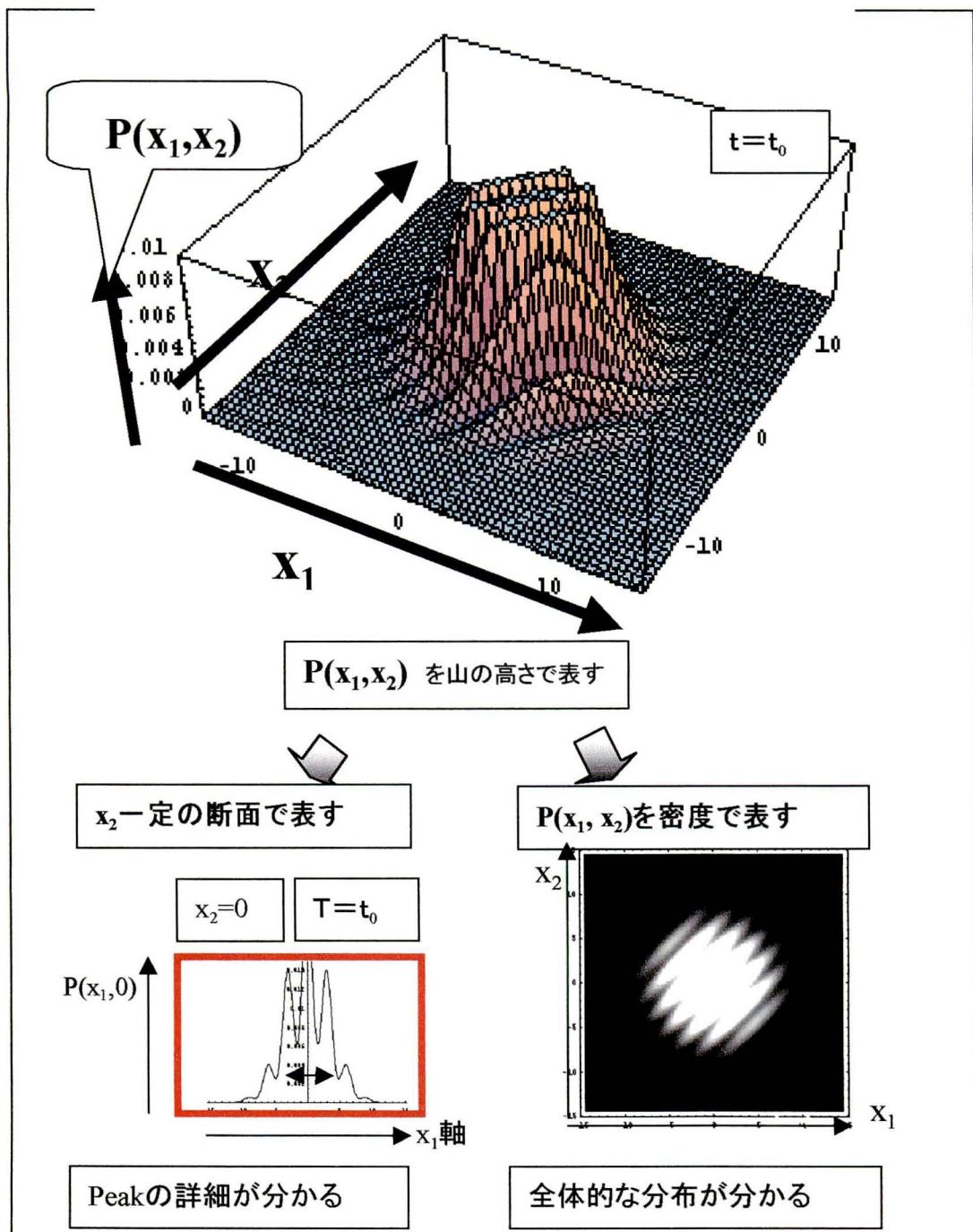
第5章 $P(x_1, x_2)$ のグラフ～シミュレーション結果

5.0 導入

比例定数を省いて P_{12} は

$$\{ |\phi_L(x_1, t_0)|^2 + |\phi_R(x_1, t_0)|^2 \} \{ |\phi_L(x_2, t_0)|^2 + |\phi_R(x_2, t_0)|^2 \} \\ + \{ \phi_L(x_2, t_0) \phi_R(x_1, t_0) \phi_R^*(x_2, t_0) \phi_L^*(x_1, t_0) + \text{c.c.} \}$$

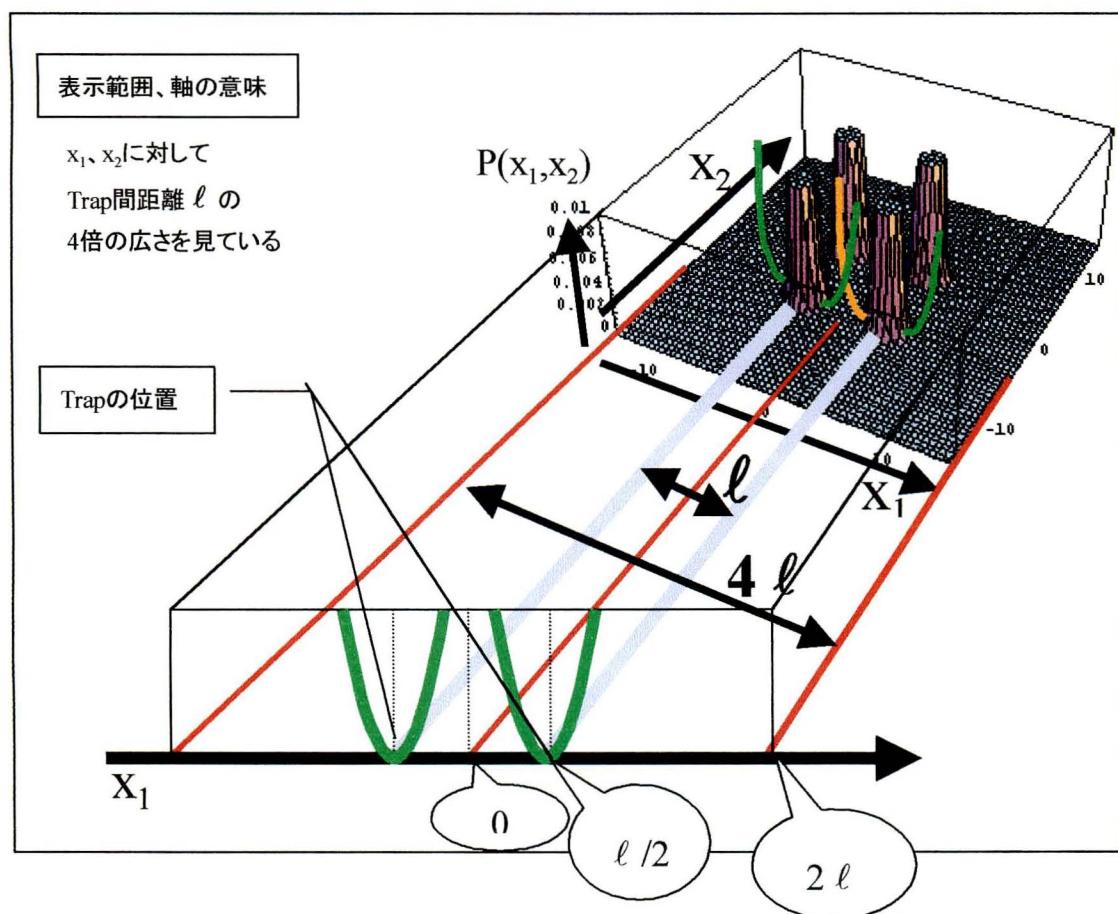
これを幾つかスタイルで実際にどのように見えるか、プロットする。
大きく分けて以下の3タイプ



まず、 x_1 - x_2 平面上で P_{12} の値を山の高さとして表す。この表現から関数の形が感覚的に分かる。次に x_1 - x_2 平面上で P_{12} の値を密度（色の濃さ）で表す。

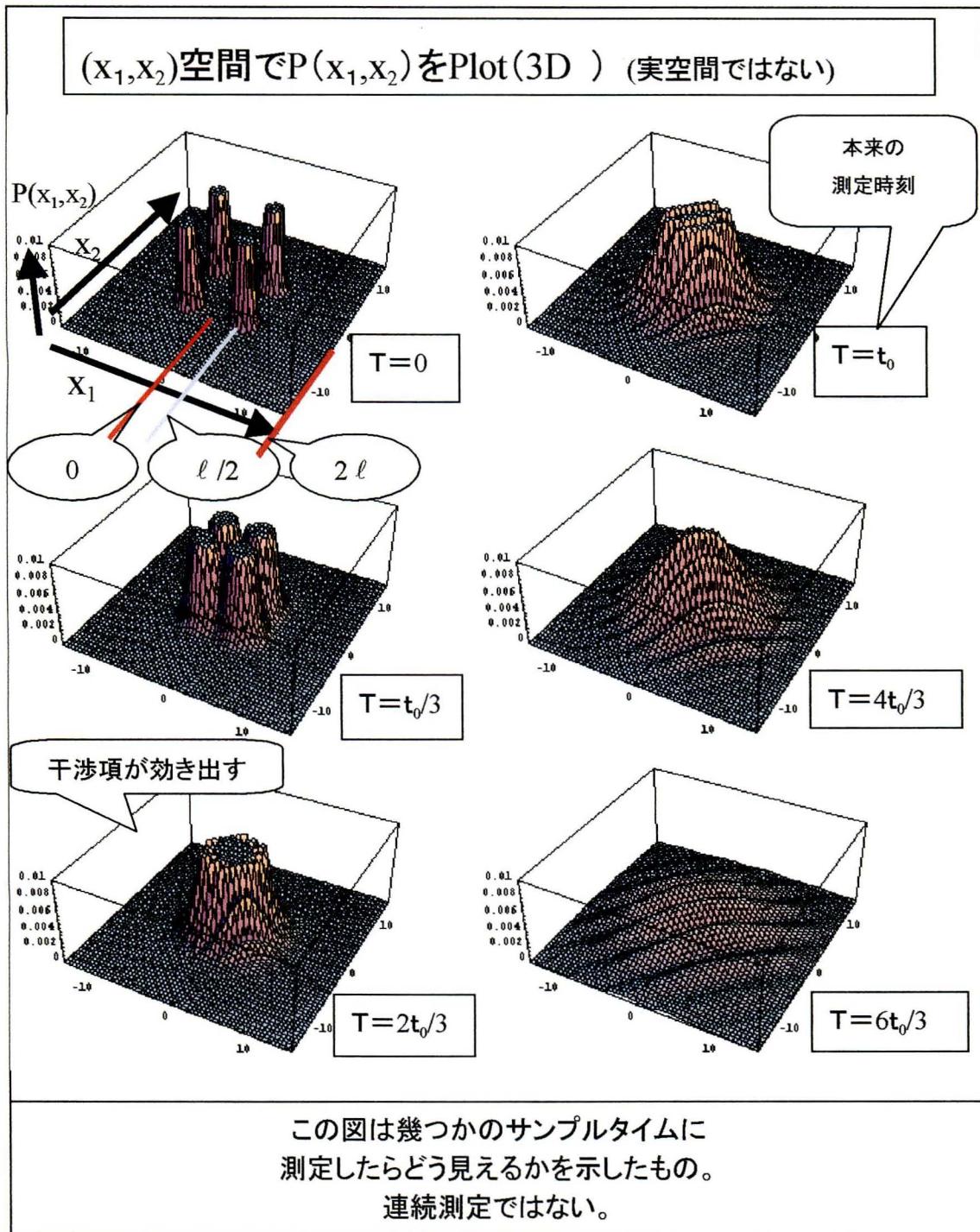
この表現からは前の 3 次元 plot では分からなかった山の裏側の情報まで全体的に把握できる。次の章で、3 つ目のタイプの図をしめす。このタイプの図は最初の 3 次元 plot を $x_2=$ 一定、という面で切断して切り出してきた断面図である。これにより、関数の周期性や、相対的な peak 高などの情報を把握することが出来る。

また、 x_1 - x_2 平面上で plot する範囲は、どのグラフも一律に各軸に対し 4ℓ である。その事を以下の図で明記しておく



5.1 3Dplot

以下に P12 を 3 次元 plot したものを見ます。

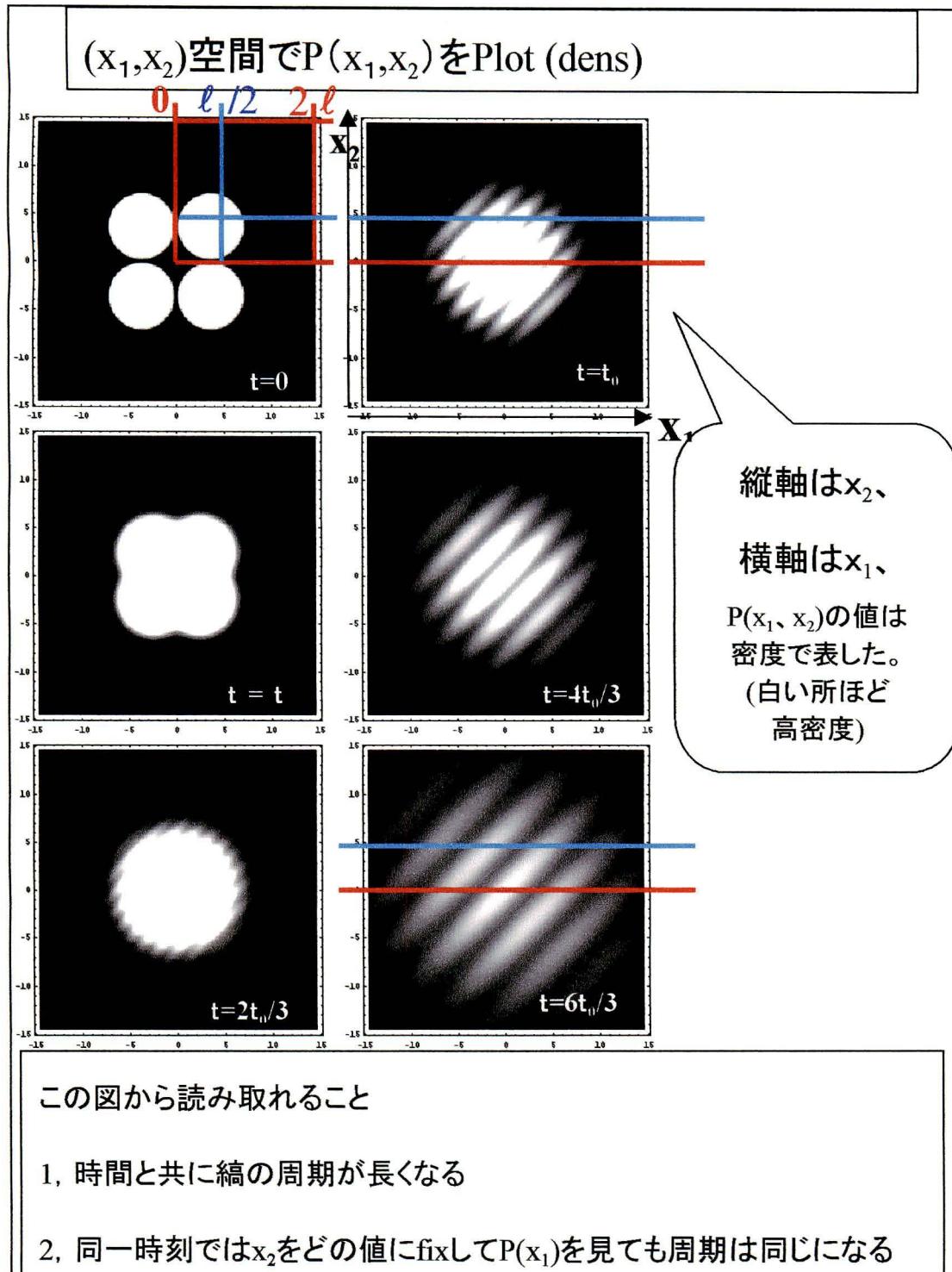


各図は幾つかのサンプルタイムに測定したらどう見えるかを示したものである。連続測定ではないので一度、どの時刻でか測定をしてしまったらそのときの実験は終了してまた同じ初期状態から実験を開始して、異なるサンプルタイムで測定を行う、ということに対応している。実際の実験に対応するのは t_0 の図である。この図

は x_1 - x_2 平面上、ある x_2 について切断した面で見ると、意味がわかりやすい。。
 $x_2 = \ell/2$ の面で切ったものを追うと、初期時刻では、trap から解き放たれたばかりのことを反映して、 $x_1 = \pm \ell/2$ 付近に柱 (peak) がある。時刻が進むにつれて、柱はだれつつ近づき 1 つになって行く。時刻 $2t_0/3$ の頃から山肌に波が立ち始め、測定時刻 t_0 にはしっかりと干渉による影響が見られる。以降は次第に滑らかで低い山、うねりとなって行く。

5.2 密度 plot

以下に P12 を密度 plot したものを示す。



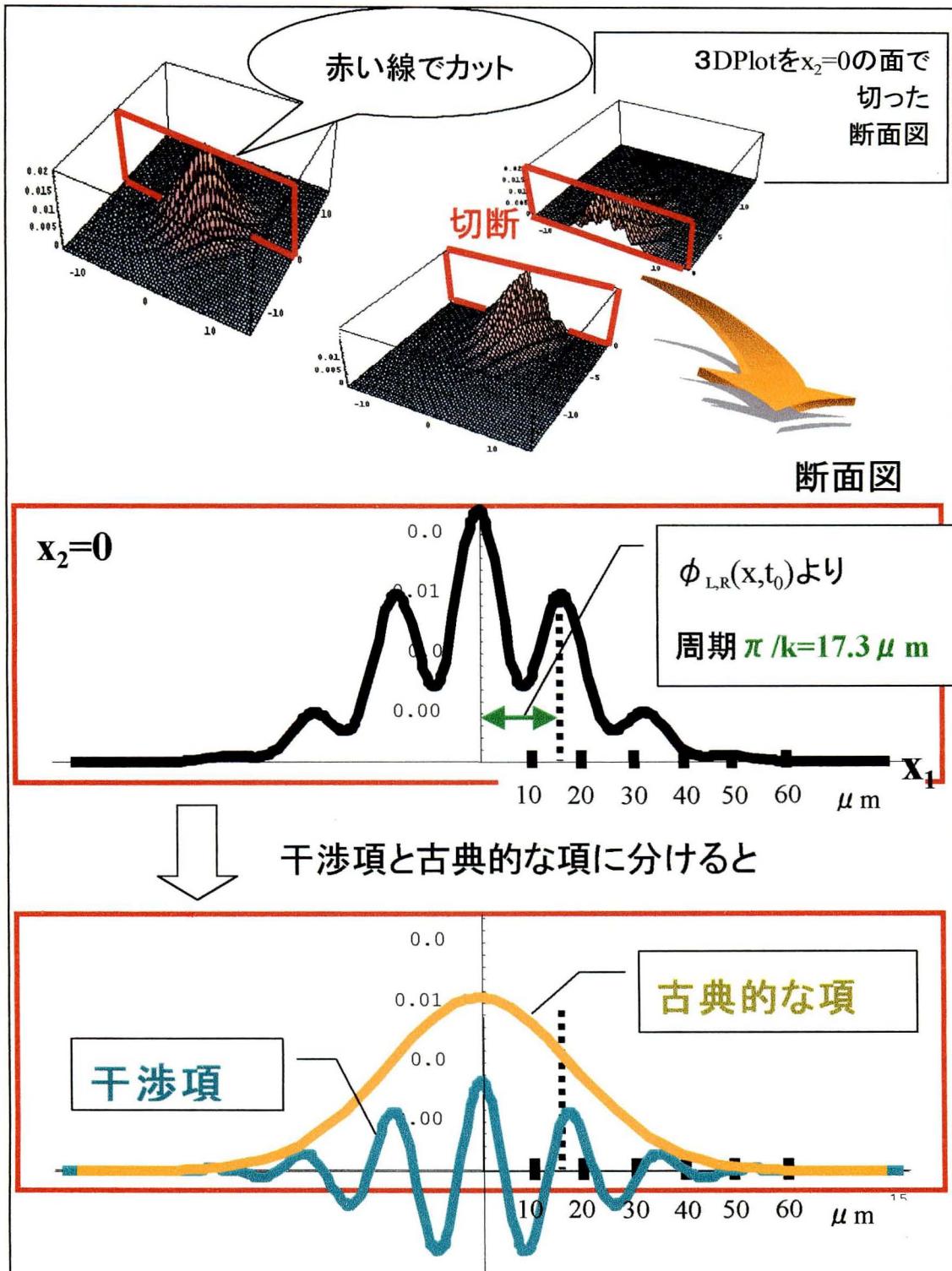
この図からも先のものと同様のことがわかる。
それに加えて補助線として加えた赤青の線 ($x_2=0, \ell/2$) に注目すると、各時刻の中では白い部分との交点の間隔はどちらの線も同じであることが分かる。こ

のことより、いずれの x_2 =一定面で切ったものでも、その時刻の周期として同じ物を見ることが出来ることがわかる。また異なる時刻のもの同士を比べた場合、縞の間隔、つまり周期は、長くなっていることが分かる。実験で測定を行う時刻を幾つかの異なるものととて観測した場合、どのように縞の間隔が変わるかを定量的に予言している。このことから、そのような実験を提案することが出来る。

第6章 2点測定の示すものと実験の関係

ここまで議論してきた2点測定は2点でのみ粒子が検出された場合の確率分布である。一方、実際の実験ではNのオーダーの数(M個とする)、粒子が検出されている。今のモデルでcounterをM個用いた確率分布が実験のパターンと直接対応するものである。では、この2点測定からは何が言えたのか？

以下に、先程の3次元plotのグラフの $t=t_0$ のものを $x_2=0$ の面で切り出してきた断面図を示す。



中段の図が断面図である。その下の図はP12の具体式で古典的な確率分布を表す項と干渉項を別々にしてplotした図である。

$t=t_0, x_2=0$ ととった時、($\phi(x)$ の具体式より)、 $P(x_1, 0)$ のpeakの周期は π/k と求まる。このグラフのpeakは、3,4つ目くらいからはぐっと低い。

この2つの特徴から、ある1つの原子の近くには、近接しているか、 π/k 、もしくは $2\pi/k$ の距離に他の原子が居やすい、ということが分かる。

本来、3つ目,4つ目の粒子を検出する状況の分布の性質は3つ,4つのcounterで測定をした場合の議論よりもとまる。そこでも、この2つのcounterでの性質が完全に保たれている保証は無いが、それでもこの2つの場合の性質が保たれていると予想するならば、別の原子を検出する場合、それは他の粒子から距離0、 π/k 、 $2\pi/k$ に居やすいと考えられ、測定にかかるM個の原子の位置は π/k の周期をもつように実現されていくと予想される。

こうして、この2点測定のモデルからは、実験の周期が予想でき、その値は π/k 。ここに、初めに見積もった k の値をいれると周期は約 $17 \mu m$ と計算できる。

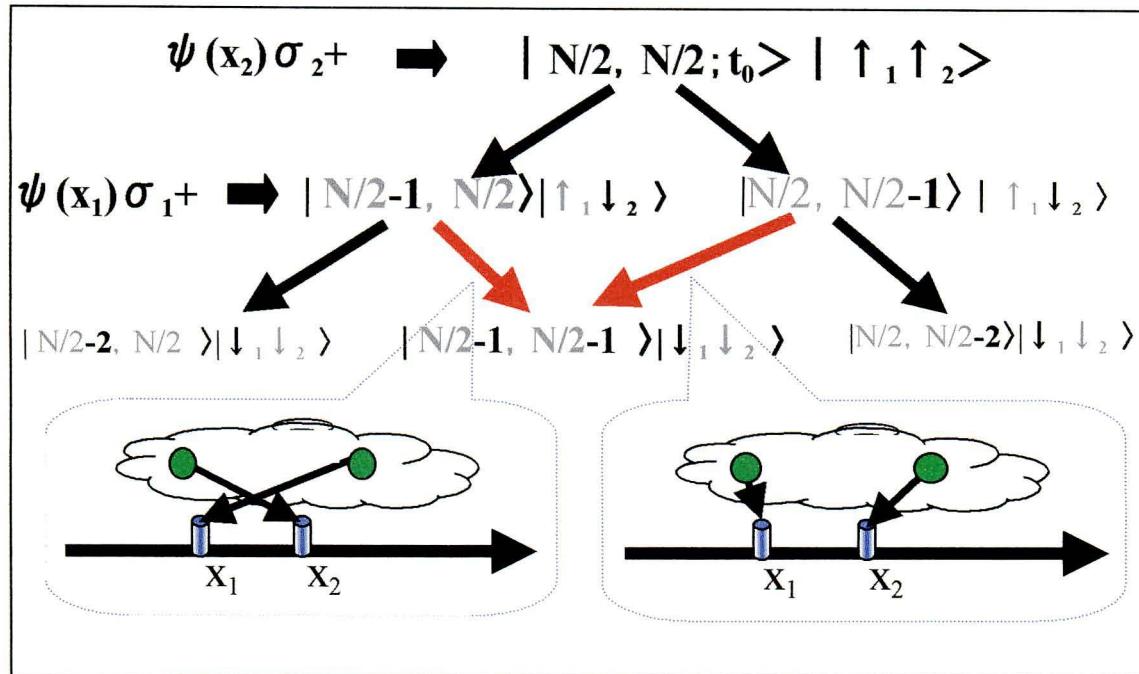
一方,Andrewsらの実験値は周期 $15 \mu m$ であった。あくまで本研究での k の具体的な値はボーズ凝縮体のpeakが平均速度 $\ell/2t_0$ で近づくと見積もったことに準拠したものなので本研究の予測する干渉縞の周期は17という値が厳密に意味を持つものではなく、周期を $10 \mu m$ や $20 \mu m$ というオーダーとして予言する、ということである。ゆえに、実験値 $15 \mu m$ と、同じオーダーで周期を予言できている、という意味で評価できるものと思われる。このモデルは非常に簡単化されたモデルの割には実験の量を予言出来ている。この事より、このモデルは実験の本質をついているものと考えられる。

付録Aに資料としていろいろな時刻、いろいろな $x_2=$ 一定、での断面図を載せておく。

第7章まとめ

なぜ相関の無いボーズ凝縮体は干渉縞を生じたのか

これを見るため、先の計算の本質だけ抜き出して書き表す



この図に見る通り、まず x_2 の測定で左からのボーズ凝縮体の粒子が1つ減った状態と、右からのボーズ凝縮体の粒子が1つ減った状態にわかれる。次に x_1 の測定で、先の2つの状態を表す確率振幅はさらに2こずつに分かれる。

そのとき、赤い矢印で書いたプロセス (x_2 に左が吸われ x_1 に右が吸われるというプロセスと、 x_2 に右が吸われ x_1 に左が吸われるというプロセス) は左と右が1つずつ減ったということを表す同じ状態へ行きつく。(これはどのcounterに、どちらから来たボーズ凝縮体の原子が入ったか、というのは区別できないということをいみしている)。

そのため、その状態に行きつく異なる観測のプロセス同士が、干渉を起こしたのであった。

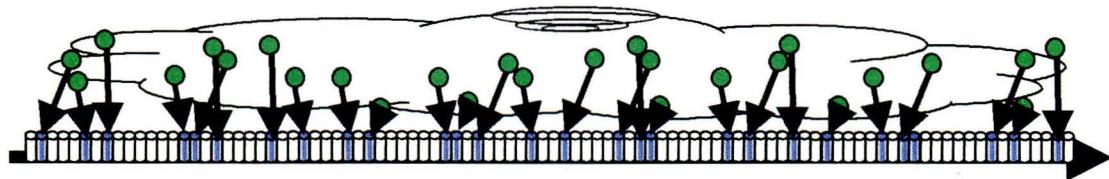
結論

別々に用意されたボーズ凝縮体の干渉はボーズ凝縮体ならではの不思議な現象ではなかった。

この現象の原因は、“同種粒子は原理的に区別できない”というふうに反映した、古くより2粒子干渉として知られる“観測の過程”同士の干渉であった。

第8章課題

実験ではNのオーダーの数の粒子を検出している。
この分野に関する課題の1つとして、今回用いたモデルのcounterの数を増やして、本来の数だけ検出した状況を調べる、ということがあげられる。



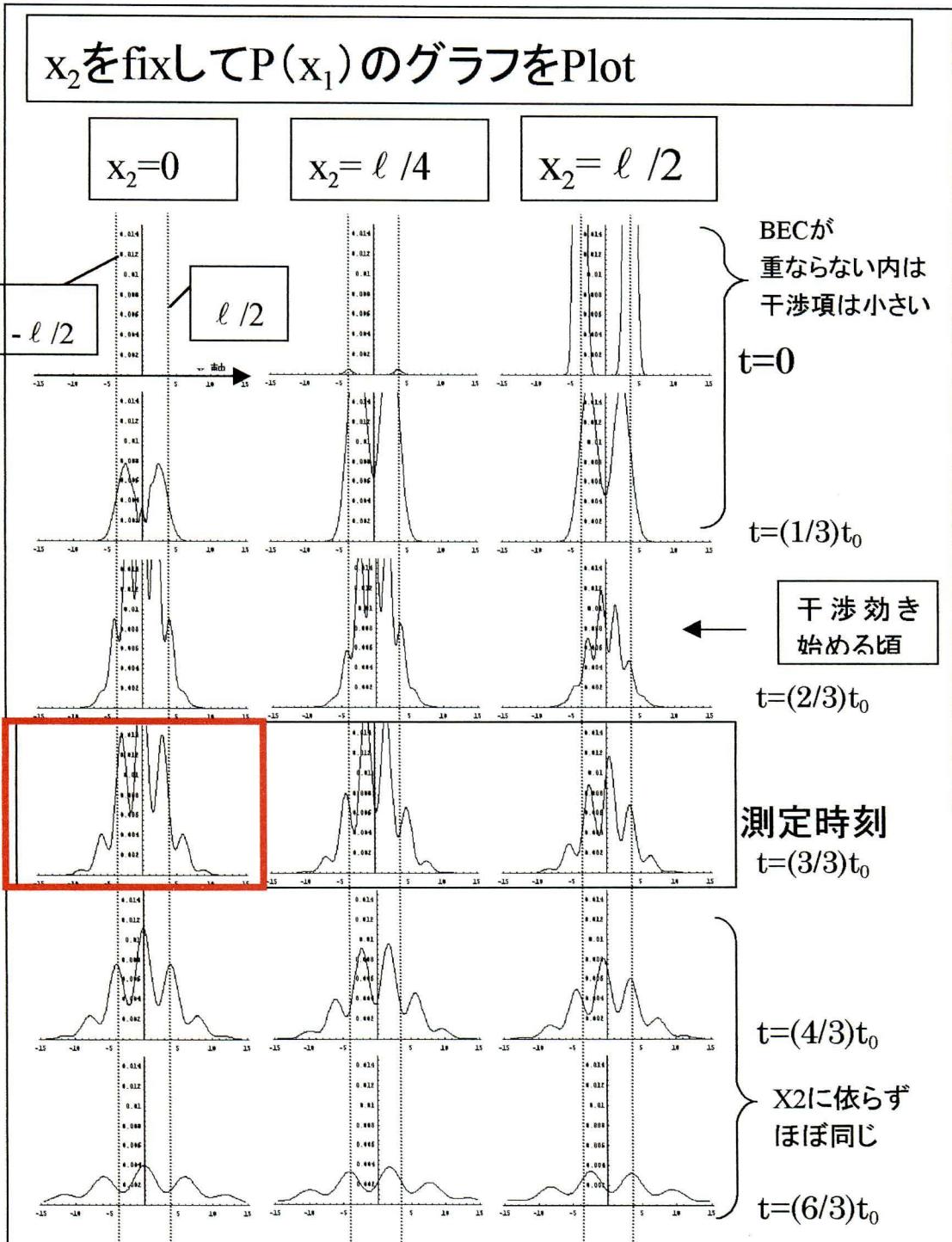
flipするcounterがどのような配置の場合に高確率であるか、調べると、



このように、flipするcounterが周期的に局在しているようなものが、ランダムなものに比べて非常に高確率であることが予想される。そしてそのような高確率なものが幾つかあって、実験でその内のどれかが実現し、その各々は同じ周期を取っているが局在する位置は1周期程度のずれがあるものと予想される。これが実験のシングルランごとの干渉縞のシフトに対応するものだと思われる。

付録

付録 A



付録 B

物理定数

$\hbar, e, 1\text{ mol}, \text{Na の質量} m_{\text{Na}}, \text{ボーア磁子} \mu_{\text{B}}$

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$e = 1.602117 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$1\text{ mol} = 6.02 \times 10^{23} \text{ 個}$$

$$m_{\text{Na}} = 3.821 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$m_{\text{Proton}} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

$$\mu_{\text{B}} = 9.2740154 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

実験に出てくる数値

B'' 、2つの BEC のはじめの距離 ℓ 、over lap するまでの時間 t_0 、fringes の間隔 d_s

$$B'' = 94 \text{ Gcm}^{-2} = 94 \text{ Tm}^{-2}$$

$$\tau = 40 \text{ ms} = 40 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\ell \sim 40 \mu\text{m} = 40 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$d_s \sim 15 \mu\text{m} = 15 \times 10^{-6} \text{ m}$$

実験における k の値

Andrews らの実験論文には k の値を明確に与えることは何もふれていない。
本論分では以下の仮定を行い k を与える。

【仮定】

$\pm k$ を持つ2つの BEC の Gaussian の中心が一致した時刻はちょうど t_0 である。

k で表される Gaussian の中心は t_0 までに $\pm kt_0/m$ 進む。

この t_0 の時刻までに $\ell/2$ 進んだという仮定より

$$k = \ell \text{ m} / 2 \hbar t_0 \text{ となる。}$$

各量を代入すると

$$k = 1.82 \times 10^5 [1/\text{m}] \text{ である}$$

文献

- [1] M.R.Andrews,C.G.Townsend,H.-J.Miesner,D.S.Durfee,D.M.Kurn and W.Ketterle ; SCIENCE 275(1997)637.
- [2] 上田正仁 ;日本物理学会誌 53(1998)663.
- [3] Juha Javanainen and Sung Mi Yoo ; Phys.Rev. 76(1996)161

追記(第9章)波数 k を 0 と見積もっても干渉縞は現れるのか?

$\phi(x)$ の具体的な式より干渉の周期は π/k である、と説明した。

これは $x_2=0$ 、かつ $t=t_0$ の状況での具体式から周期を求めた。これはどの $x_2=$ 一定面でも、周期は同じであることから、求めやすいものとして $x_2=0$ を採用していた。また時刻 t_0 は測定の時刻であるのでそれを代表として、選んだ。

その後、 k の見積もりを変えて、 $k=0$ と、選んだらどうなるのか? ということについて多くの方にご質問頂いた。 π/k に対し $k=0$ を入れるとこのときの周期は無限大、つまり $\pi/0$ になるのである、と思われた。

そこで、P12 の干渉項の周期を、 k と t の関数として Plot してみたところ、 k が 0 であっても、干渉項の周期は正の有限な量として存在していた。更に k が負の状況でも周期は、部分的に、正の有限な量として存在していた。干渉縞の発生する原因是初期時刻にうちかわに向って進んでいることではないことが分かる。どのような k を採用してもだいたい同じオーダーの干渉縞周期はえられる。

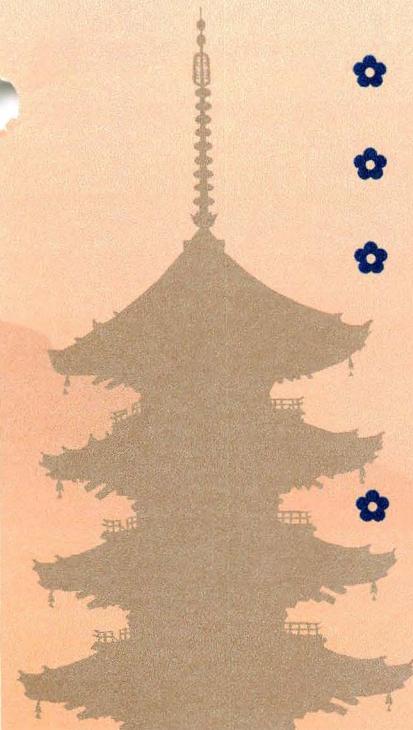
この解析を元に実験を一番上手くあらわせる k をもとめ、それが本来の実験での初速度であったのだと、結論できよう。

またこの周期依存性は、 k と観測時刻によるものであり、実験では trap を切るタイミングを laser の切るタイミングとずらすことでこれらに対応した状況を実験することが出来る。

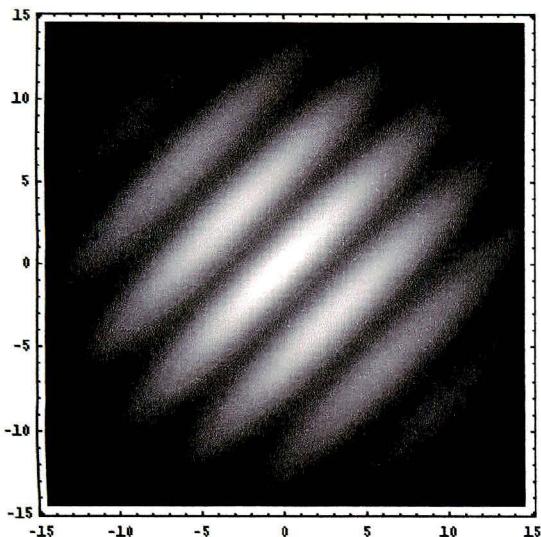
k を任意の値として、干渉縞の間隔 D を求めるとどうなるかを載せておきます。これは私の修士論文発表会後に、京都大学での研究会に向けて新たにこの理論を発展させたものです。時間の都合上、研究会でのプレゼン資料をそのまま載せて、研究成果の発表とさせていただくことをお許しください。

京都の研究会での 発表内容List

- ✿ 1. 本研究のモチベーション
- ✿ 2. 実験の紹介
- ✿ 3. ボーズ凝縮体のモデル
- ✿ 4. 相互作用のモデル
- ✿ 5. 1地点での検出
- ✿ 5. 2地点での検出
- ✿ 6. $P(x_1, x_2)$ のグラフ
- ✿ 7. 2点測定の示すものと実験の関係
- ✿ 8. このモデルから予言されること
- ✿ 9. まとめ
なぜ相関の無いボーズ凝縮体は
干渉縞を生じたのか
- ✿ 10. 課題



独立なボーズ凝縮体間の干渉性について



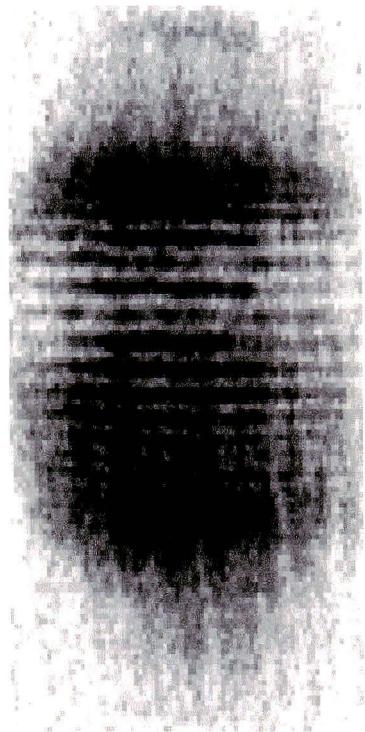
東北大学 修士二年

石井力重

1. 本研究のモチベーション

- 相関も無く、いわば各々勝手に用意した2つのボーズ凝縮体の干渉実験で実際に干渉縞が生じている。
↓
- 量子的相関を持たぬ物の間に生じたこの干渉縞はボーズ凝縮体ならではの不思議な現象なのだろうか？

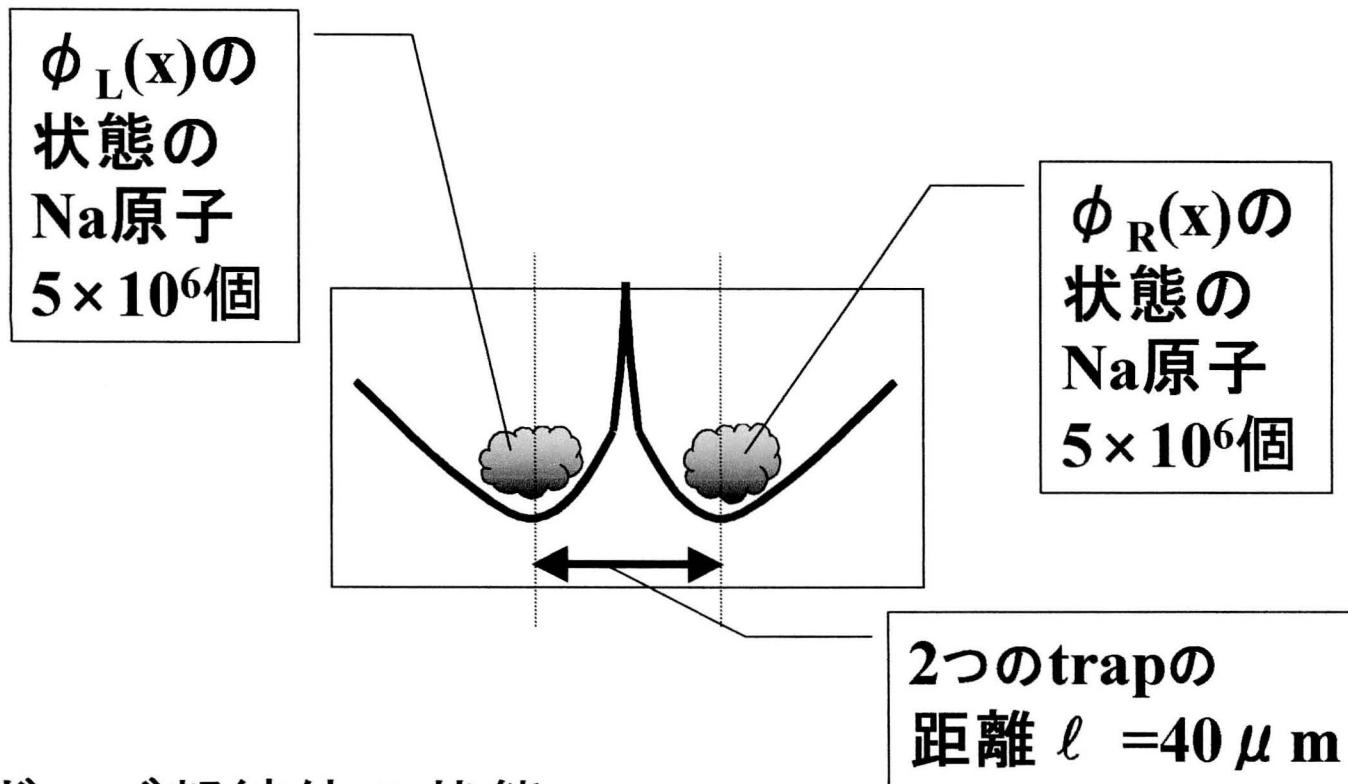
+干渉縞の間隔は何によって決まるか



- 近年、キハク中性原子気体のボーズ凝縮が実現されるようになり、それを用いて、興味ある実験が行われています

- 1つ97年のAndrewsらの仕事を紹介します。
- 1. トンネルでは行き来出来無い程距離のある2つのtrap
- 2. 別々に準備した原子ガスからつくったボーズ凝縮体をtrap
- 3. trapを同時に切りボーズ凝縮体を自由に広がらせる
- 4. ボーズ凝縮体が重なり合った頃、光を当てて観測
↓
- 5. 結果
まるで2つのボーズ凝縮体間に相関があったかのような、Youngの実験に見られるものと同じような干渉縞を示していた。

2. 実験の紹介

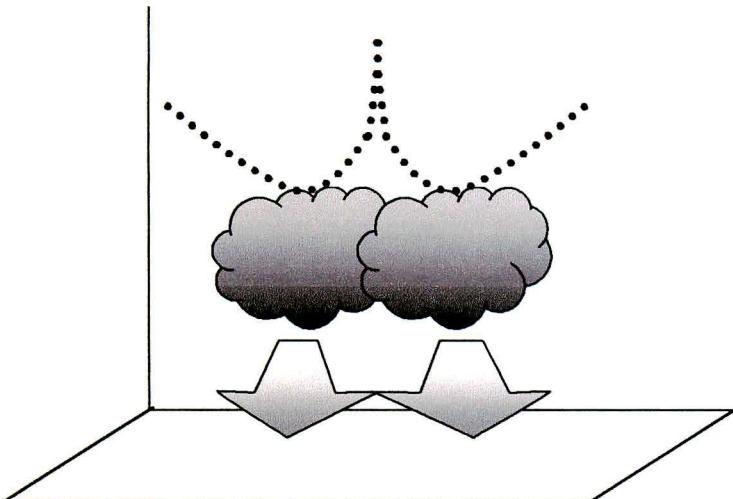


ボーズ凝縮体の状態

$$\begin{aligned}
 & |N/2_L, N/2_R\rangle \\
 & = \frac{1}{(N/2)!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_L(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_R(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} |0\rangle
 \end{aligned}$$

$$\Phi(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \frac{1}{(N/2)!} S \prod_{i=1}^{N/2} \phi_L(x^{(i)}) \times \prod_{i=N/2+1}^N \phi_R(x^{(i)})$$

トンネル効果では行き来出来無い程離れた($40 \mu m$)
double well potentialのtrap中に
Na原子 5×10^6 個ずつからなるボーズ凝縮体がtrap
されている



Trapのswitchを切り
ボーズ凝縮体を
自由落下させる

落下しつつ
広がり互いに
重なり合っていく

時刻 $t_0 = 40\text{m秒}$

Probe
beam

trapを切ってから
40m秒後
広がり重なり合った
ボーズ凝縮体に
Probe beamをあてる。

観測された
Na原子

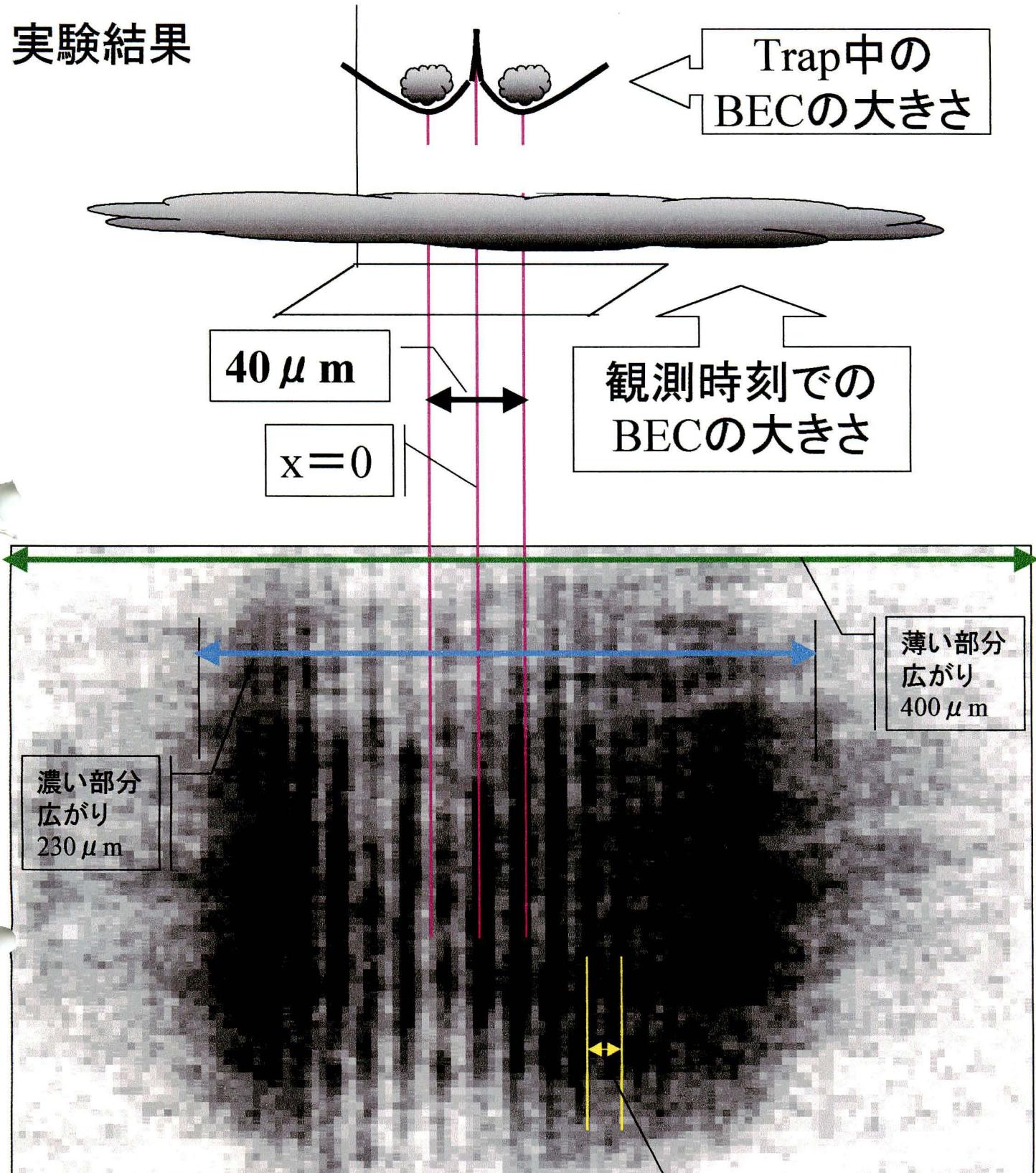
散乱光

各Na原子はbeamを
散乱する

その散乱光を
見ることで
Na原子の分布を
観測する

Fig.A2参照

実験結果



M.R.Andrews, et al. ; SCIENCE
275(1997)637 より転載

Fringe幅
 $15 \mu m$

⇒あたかも, Youngの実験に見られるような干渉縞が現れた

potential

Laser
無し

Na原子ガス

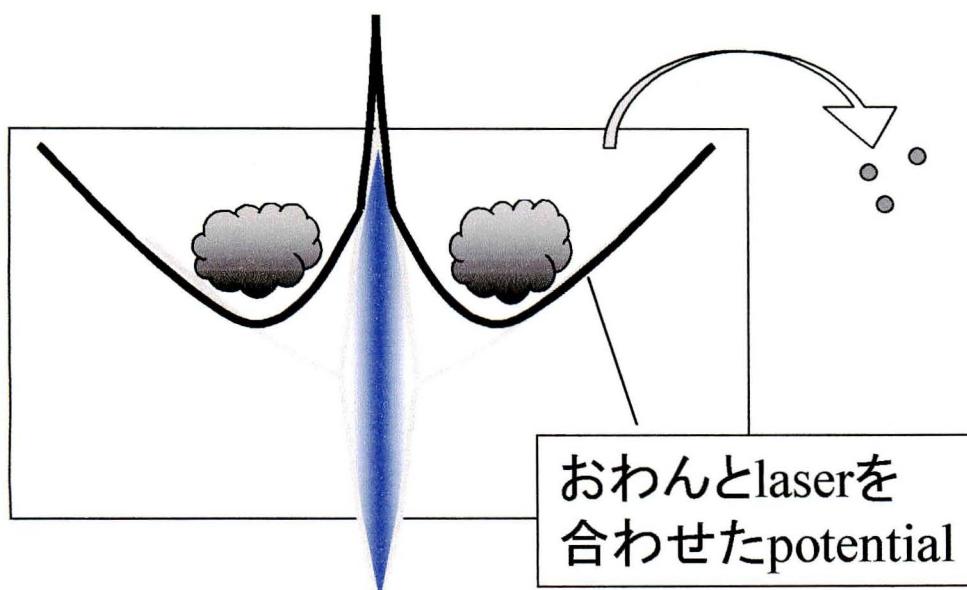
磁気と光で
3次元的なおわん型の
potentialを作る。
そこにNa原子ガスを
trapする。

Laser
有り壁を作る
laser

ガスを排除する
シート状のlaserを
おわんの中心へ
照射して壁を作る。

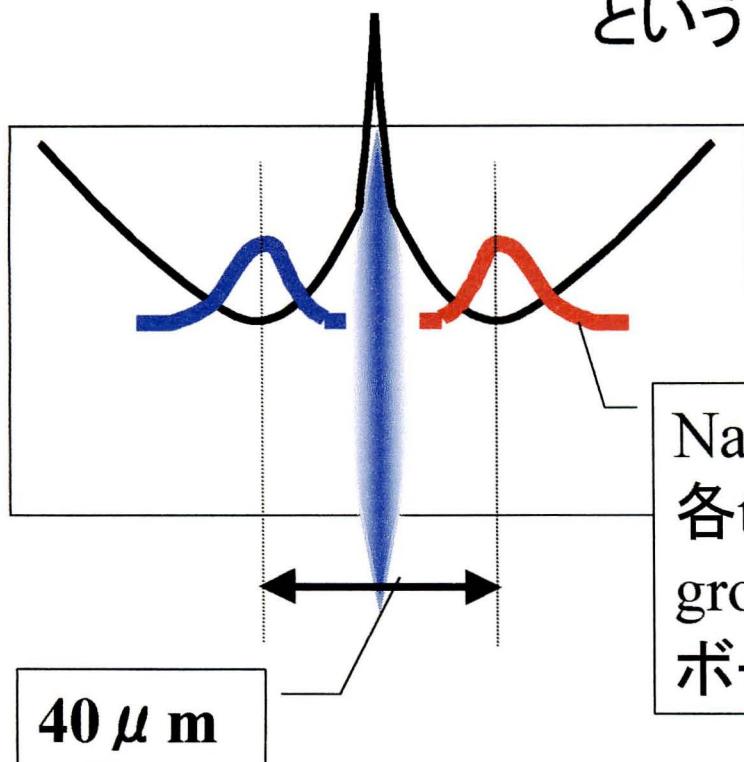
Laser
強

Laserのパワーを
強くすることで
行き来出来ない程の
potentialの
障壁となる。



蒸発冷却

↓
trapされているものは
ほとんどボーズ凝縮している
という状況を実現



3. ボーズ凝縮体のモデル

$$|N/2_L, N/2_R; 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{(N/2)!} \left(\int dx \phi_L(x,0) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} \left(\int dx \phi_R(x,0) \hat{\psi}^\dagger(x) \right)^{N/2} |0\rangle$$

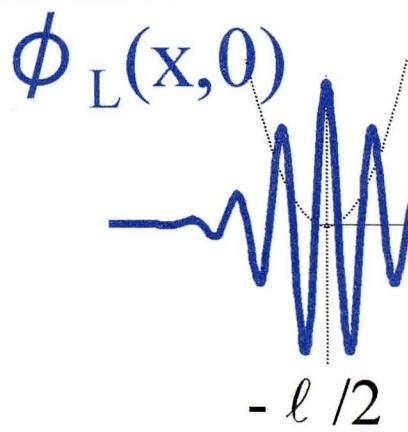
$$\left. \begin{array}{c} \phi_L(x,0) \\ \phi_R(x,0) \end{array} \right\} \propto e^{-((x \pm \ell/2)/s)^2} e^{\pm i k (x \pm \ell/2)}$$

今日の発表では主に $k=0$

- Gaussianはtrapの特徴を反映させたh.o.のg.s.で与える
具体的にはtrapの曲率から計算して

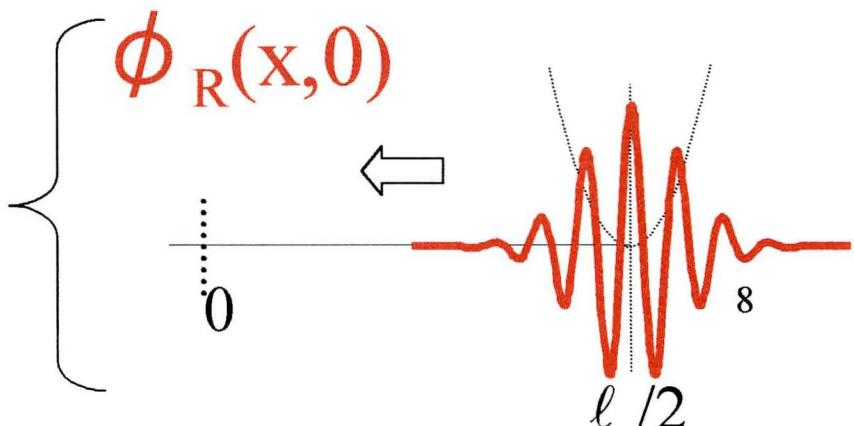
Gaussianの幅 $s = 12.1 \mu m$

- k はパラメーター(平均速度 $\pm \hbar k/m$ を持つモデル)

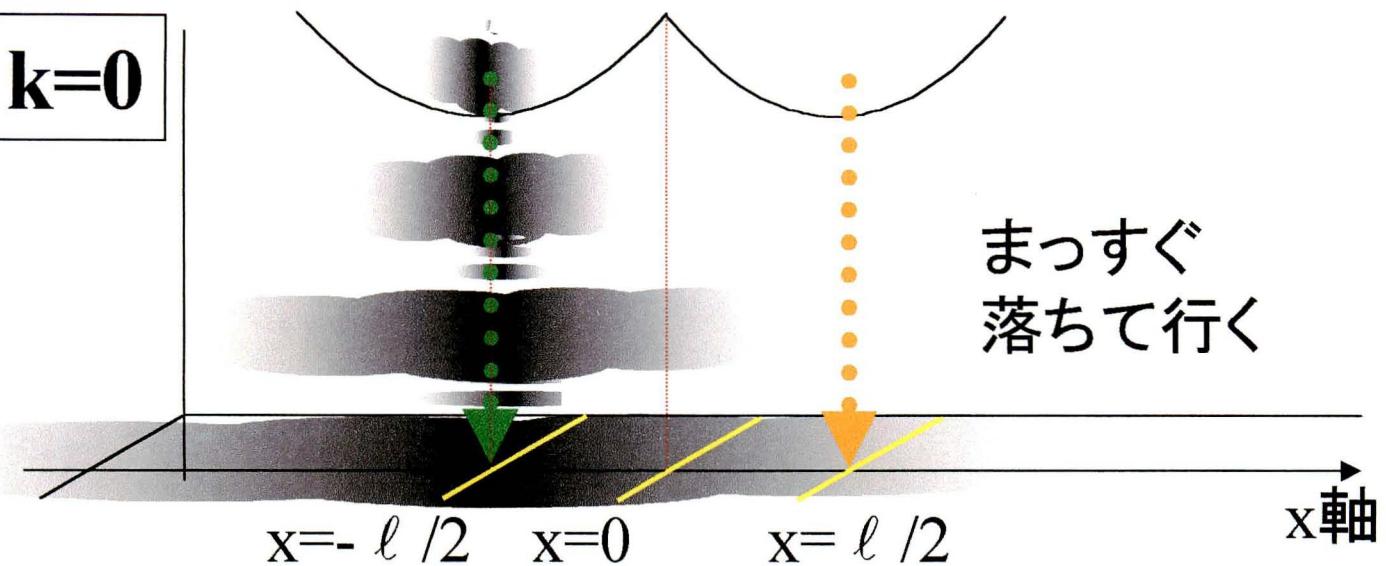


青の波動関数で
表される状態の
Na原子が $N/2$ 個
(5×10^6 個)

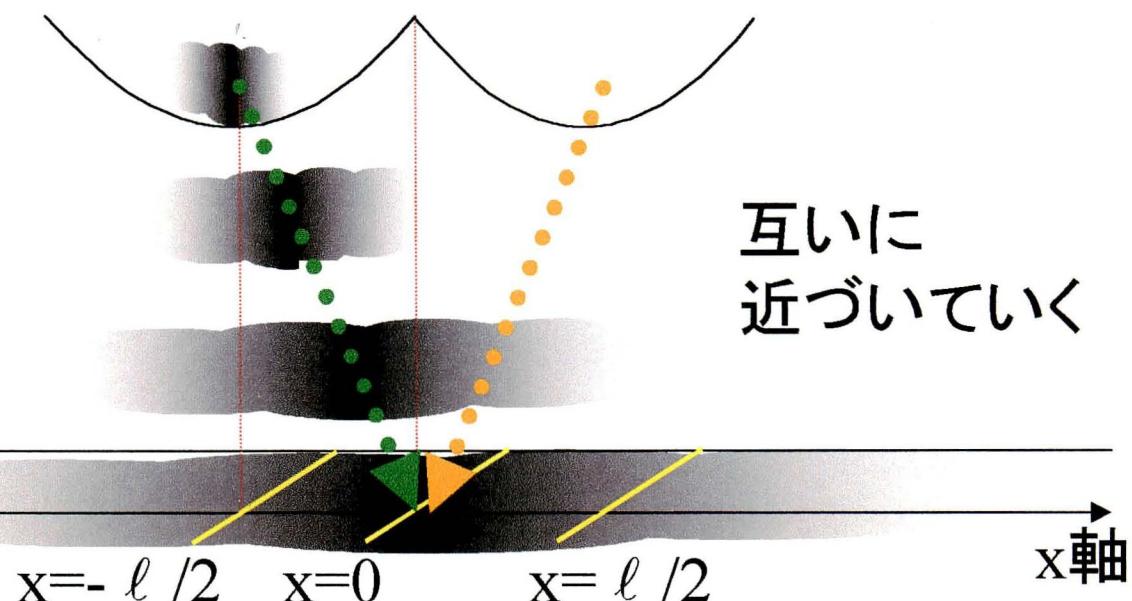
赤の波動関数で
表される状態の
Na原子が $N/2$ 個
(5×10^6 個)



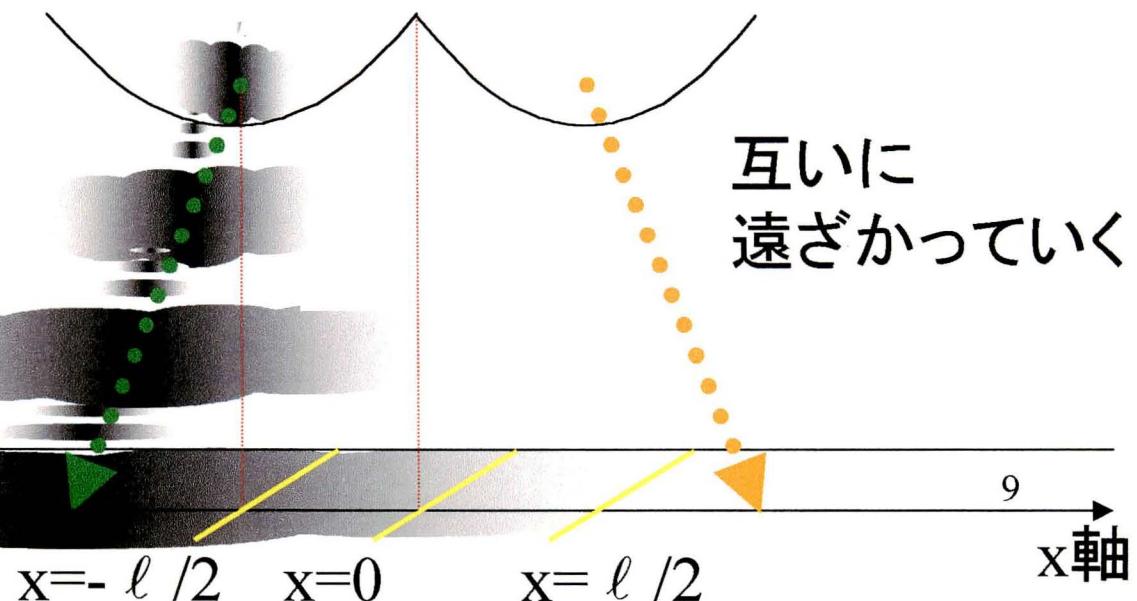
$k=0$



$k>0$



$k<0$



手元の非公開資料

- Javanainenら(96年1月)のモデルでは
左右のボーズ凝縮体を、
もっともシンプルなモデルとして
N/2個ずつの反対向きの平面波でモデル化。
↓
- 私の初期の研究では、
これに少し現実味を持たせて
“初期状態に実験に対応する、有限の広がりを
もって進む波束、としてモデル化”したら
何が他にわかるか
ということを、調べていってました。
- すると、互いに近づくということのみが
干渉縞の間隔に影響するのではなく、
ボーズ凝縮体が広がって行く効果も
干渉縞の間隔の決定する要因の 1つである、
ということが分かりました。
- (更に言えば、むしろ互いに近づくことの影響よりも
広がりによる効果が大きい)
- 今回の発表では、
そのことをシミュレーションをしてみたものを
お見せします。

質疑用資料 波動関数の時間発展

$$\phi_{L,R}(x,0)$$

$$= (2/\pi S^2)^{1/4} \exp \{ -(x \pm \ell/2)^2/S^2 \pm ik(x \pm \ell/2) \}$$

↓

$$\phi_{L,R}(x,t)$$

$$= (2/\pi S^2)^{1/4} \{ 1/(1+2i\hbar t/mS^2) \}^{1/2} \\ \exp \{ i\hbar k^2 t/2m - (x \pm [\ell/2 - \hbar kt/m])^2/\{S^2(1+2i\hbar t/mS^2)\} \\ \pm ik(x \pm [\ell/2 - \hbar kt/m]) \}$$

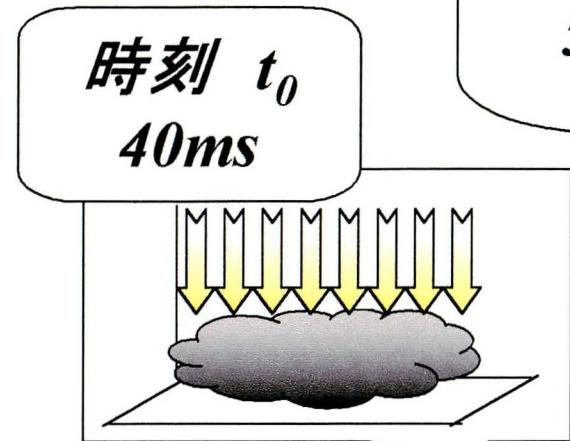
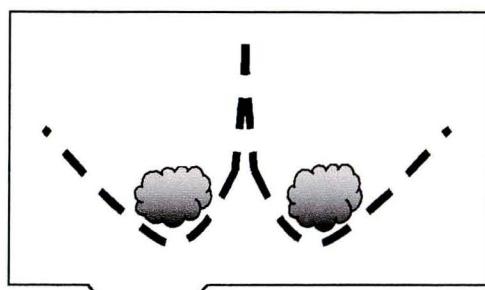
$$1/\{S^2(1+2i\hbar t/mS^2)\}$$

$$= (1-2i\hbar t/mS^2)/\{S^2(1+[2\hbar t/mS^2]^2)\}$$

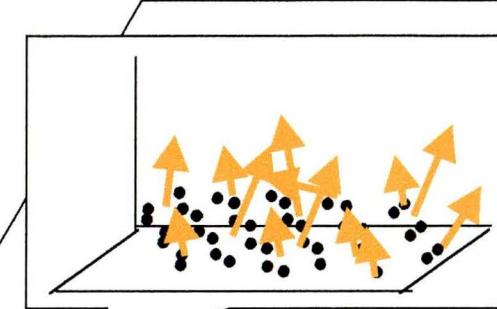
$$= 1/\{S^2(1+[2\hbar t/mS^2]^2)\}$$

$$+ i(-2\hbar t/mS^2)/\{S^2(1+[2\hbar t/mS^2]^2)\}$$

実験



probe beamを照射している
非常に短い時間間隔 Δt
 $50 \mu s$ (t_0 の約1/1000)



時間軸

モデル

ボーズ凝縮体を表す波束が
自由に広がっていく

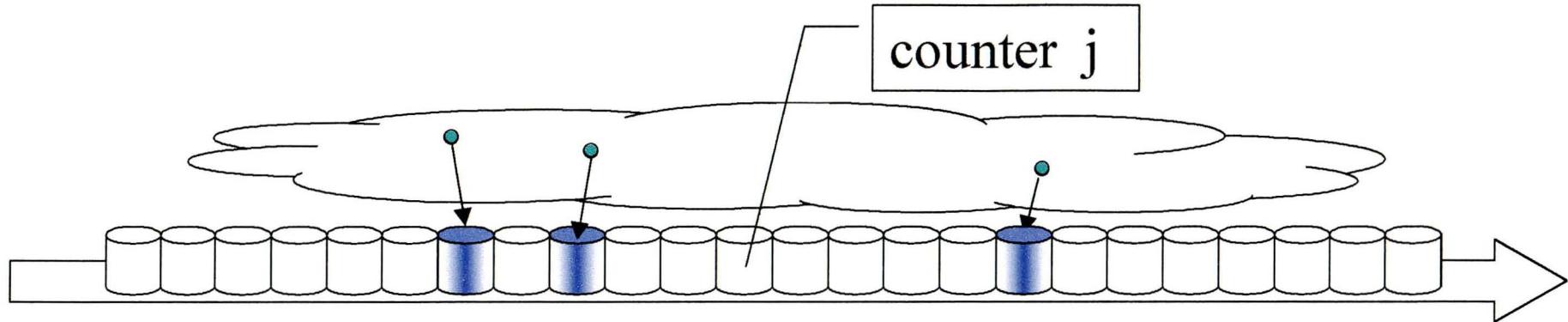
この過程を
ボーズ凝縮体とcounterの
相互作用としてモデル化

4. 相互作用のモデル

実験の、光による測定をシンプルにモデル化



測定領域を幅の小さなcounterが埋め尽くしているモデル



1つ1つのcounterはtwo state atom

Na原子を1つ吸って

$|\downarrow\rangle_j$ から $|\uparrow\rangle_j$ へ flip

初期状態では

全てのcounterが $|\downarrow\rangle$

Na原子とcountersの相互作用Hamiltonian

$$\mathcal{H}_I = g \sum_j (\sigma_{j+} \hat{\psi}(x_j) + \text{h.c.})$$

$$\text{ただし } \sigma_{j+} = |\uparrow\rangle_j \langle \downarrow|$$

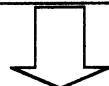
$j=1$ から $L/\Delta x$ まで

\mathcal{H}_I での時間発展の式

相互作用後の状態

$$|\Psi(t_0 + \Delta t)\rangle = \exp(-i\Delta t \mathcal{H}_I / \hbar) |N/2, N/2; t_0\rangle |\downarrow\rangle$$

ただし $|\downarrow\rangle$ は $j=1 \sim L/\Delta x$ まで全てが
downの状態であることと約束



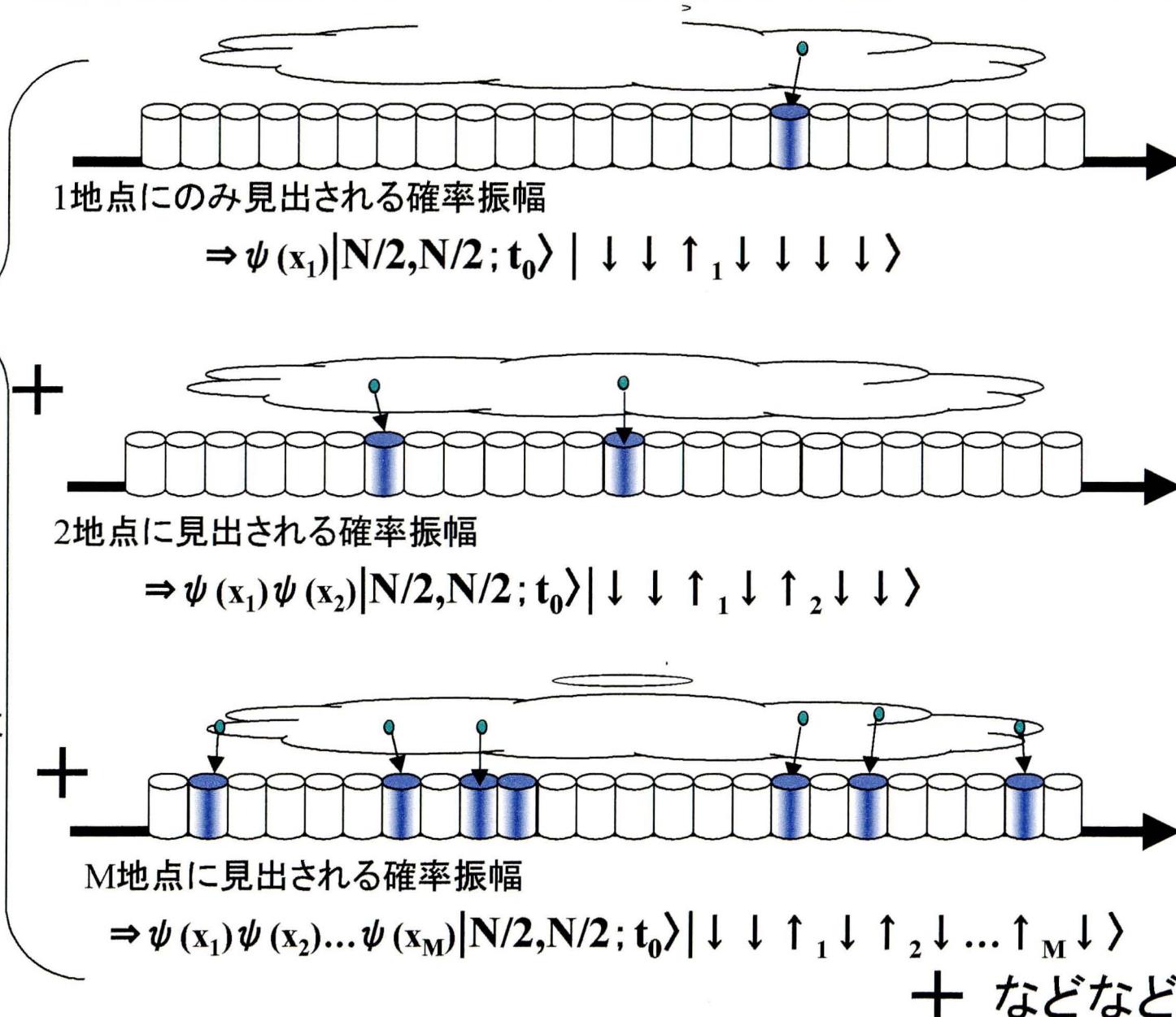
測定後の状態は
様々なcounterの組がカウントした状態の重ね合わせ

counterとの相互作用により、ボーズ凝縮体の状態は
1地点、2地点やM地点などにカウントされる確率振幅の線形結合となる

$$|\Psi(t_0 + \Delta t)\rangle =$$

$$= \exp(-i\Delta t \mathcal{H}_I / \hbar) |N/2, N/2; t_0\rangle |\downarrow\rangle$$

ただし $|\downarrow\rangle$ は
 $j=1 \sim L/\Delta x$ まで全てが
downの状態であることと約束



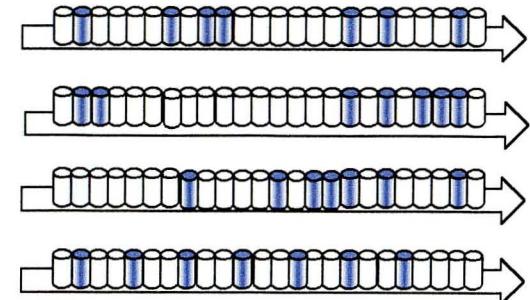
同じ実験の繰り返しごとに、
そのどれかの状態が実現する。
そういうた同じ実験を数千数万と繰り返しデータを取る。
そのなかで
どの位置かは問わず、幾つのカウントがあったか、
という観点から実験のサンプルを分類した集合を作る。

その数をnとすれば、n個のカウントが有った場合、
どういう配置のものが大きな確率で出現するかを議論できる。

今、問題にしているAndrewsらの実験で、
M個($=O(N)$)のカウントが有ったなら
それに対応する今のモデルは
M地点のcounterがflipした
事象の集合である。

その集合の中で
最も出現確率の高いものがいくつあるだろう。
実験ではそれらのどれかが実現する。

M個のカウントが
有った状態の集合

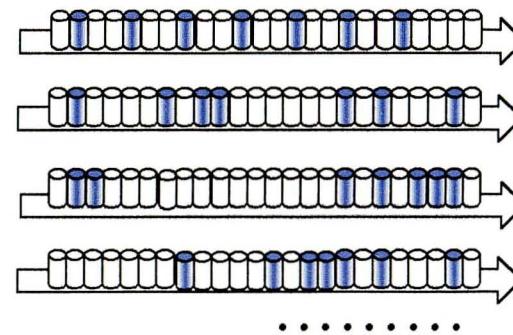


質疑用資料

(M-flip集合とM個のcounterでの測定)

M個のcounterがflipした状態の集合内で
どの配置のcounterがflipするか、
ということを議論することは

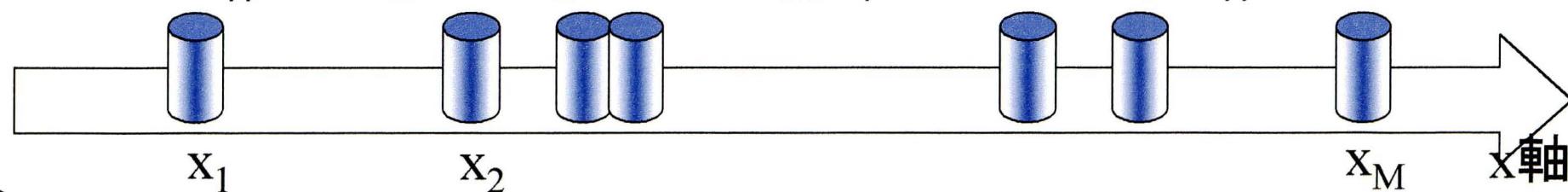
M個のcounterが
flipした状態の集合



空間中 x_1, x_2, \dots, x_M に置いた M 個の counter だけを考えて
確率がその位置変数に対して
どのような関数になっているかを調べることと同じ

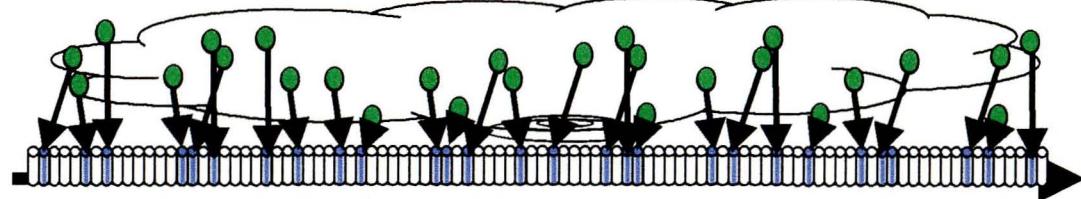
“カウンティングレイト”

$$\propto \left\| \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \dots \hat{\psi}(x_M) |N/2, N/2; t_0 \rangle \right\|^2$$



観測される数が多いことがこの現象の本質なのだろうか

本来、実験の状況と
直に対応するのは
M(非常に大きい数)地点で
カウントされる確率振幅。



本論文で示したいこと

flipするcounterの数がまず少ない状況で、
相互作用によるボーズ凝縮体の変化を調べる。

ボーズ凝縮体の干渉が現れるまで、
観測される数の多い状況へ進む。

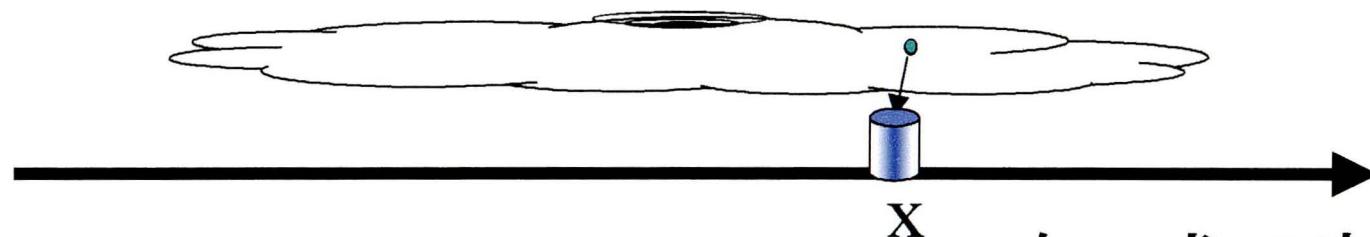
何がこの干渉の本質的な機構となっているのかを
明確にする。

5.1 1地点での検出

最も簡単な状況 1つのcounterの場合

$$\mathcal{H}_I = g(\sigma_{1+} \hat{\psi}(x) + \text{h.c.})$$

- x点にNa原子を検出する確率振幅



を、式で表せば以下

$$\hat{\psi}(x, t_0) \sigma_+ |N/2, N/2; t_0\rangle | \downarrow \rangle$$

$$\propto (\phi_L(x, t_0) |N/2-1, N/2; t_0\rangle + \phi_R(x, t_0) |N/2, N/2-1; t_0\rangle) | \uparrow \rangle$$

左からのBECを1つ消した
その時 $\phi_L(x, t_0)$ がでる

右からのBECを1つ消した
その時 $\phi_R(x, t_0)$ がでる

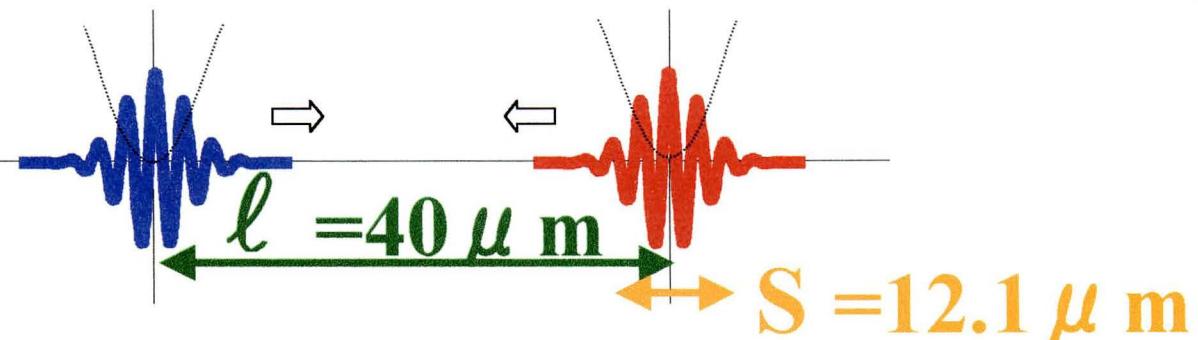
x 点にNa原子を検出する確率 $P(x)$

$$= \left| \left| \text{検出確率振幅} \right| \right|^2$$

$$\propto (\phi_L(x, t_0) \phi_L^*(x, t_0)_{N/2-1, N/2 | N/2-1, N/2} + \phi_R(x, t_0) \phi_R^*(x, t_0)_{N/2, N/2-1 | N/2, N/2-1} + \phi_R(x, t_0) \phi_L^*(x, t_0)_{N/2-1, N/2 | N/2, N/2-1} + \phi_L(x, t_0) \phi_R^*(x, t_0)_{N/2, N/2-1 | N/2-1, N/2})$$

$$= (|\phi_L(x, t_0)|^2 + |\phi_R(x, t_0)|^2 + \lambda \phi_R(x, t_0) \phi_L^*(x, t_0) + \lambda^* \phi_L(x, t_0) \phi_R^*(x, t_0))$$

$$\lambda = \int dx \phi_L^*(x, 0) \phi_R(x, 0) \leq 4.3 \times 10^{-3}$$



重なり積分 λ ... 初期状態における左右の相関の度合い

$\lambda \sim O(1/1000)$ を無視するなら、
これはただの古典的な確率の和

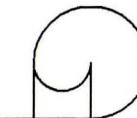
$$(|\phi_L(x, t_0)|^2 + |\phi_R(x, t_0)|^2) \quad 20$$

である

初期時刻に重なり積分 λ がほとんど大きさを持たないので
干渉項は残らない

つまり通常の認識どおり、

初めに量子的相関を持たぬものは、1地点のみの測定では
確率分布は左のものと右のものの古典的な和として現れる。
つまり、干渉は生じない。



1点のみの測定で見える干渉

初めに用意した2つの原子の状態が
overlapを持っている場合

(\equiv 相関をもっている場合)

ある1地点に観測された時に
どちらから来たものだったかを原理的に言う事が出来ない。
そのことが干渉を生じさせている。

5.2 2地点での検出 2つのcounterの場合

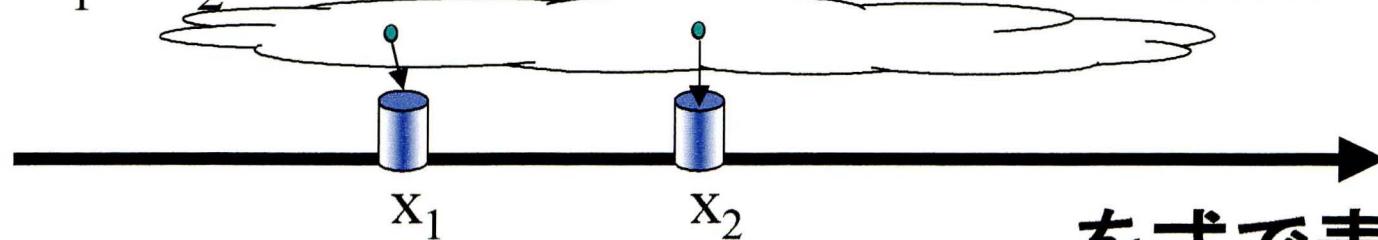
1点のみの測定では
実験の干渉を反映していなかった
そこで次に1つ増やして、
2点を測定した場合を考える

先のモデルcounterを
 x_1, x_2 に用意

$$\mathcal{H}_I = g(\sigma_{1+} \hat{\psi}(x_1) + \text{h.c.}) + g(\sigma_{2+} \hat{\psi}(x_2) + \text{h.c.})$$

- counterを含めた測定前の状態は
 $|\Psi(t_0)\rangle = |N/2, N/2; t_0\rangle |\downarrow_1 \downarrow_2\rangle$

- x_1, x_2 にNa原子を検出する確率振幅



を式で表せば以下

$$\hat{\psi}(x_1)\sigma_{1+}\hat{\psi}(x_2)\sigma_{2+} |N/2, N/2; t_0\rangle | \downarrow_1 \downarrow_2 \rangle$$

$$\propto \hat{\psi}(x_1)\sigma_{1+}$$

$$(\phi_L(x_2, t_0) |N/2-1, N/2; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0) |N/2, N/2-1; t_0\rangle) | \downarrow_1 \uparrow_2 \rangle$$

Counter2が左からの観測

Counter2が右からの観測

同じ状態

$$\propto (\phi_L(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0) |N/2-2, N/2; t_0\rangle + \phi_L(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0) |N/2-1, N/2-1; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0)\phi_L(x_1, t_0) |N/2-1, N/2-1; t_0\rangle + \phi_R(x_2, t_0)\phi_R(x_1, t_0) |N/2, N/2-2; t_0\rangle) | \uparrow_1 \uparrow_2 \rangle$$

X_1, X_2 にNa原子を検出する確率 $P_{2\text{個検出}}(x_1 x_2)$

$P_{2\text{個検出}}(x_1 x_2)$ 以下では $O(\lambda)$ は無視して表記

$$\propto \{ \begin{aligned} & |\phi_L(x_2, t_0) \phi_L(x_1, t_0)|^2 \\ & + |\phi_L(x_2, t_0) \phi_R(x_1, t_0) + \phi_R(x_2, t_0) \phi_L(x_1, t_0)|^2 \\ & + |\phi_R(x_2, t_0) \phi_R(x_1, t_0)|^2 \end{aligned} \}$$

↓ 古典的確率とそうでない部分にまとめる

$$\propto \{ |\phi_L(x_1, t_0)|^2 + |\phi_R(x_1, t_0)|^2 \} \{ |\phi_L(x_2, t_0)|^2 + |\phi_R(x_2, t_0)|^2 \}$$

干渉 ($|N/2-1, N/2-1\rangle$ が 出所)

古典的確率分布

$$+ \{ \phi_L(x_2, t_0) \phi_R(x_1, t_0) \phi_R^*(x_2, t_0) \phi_L^*(x_1, t_0) + \text{c.c.} \}$$

質疑用資料 干渉項の具体式

干渉項

$$2\operatorname{Re}[\phi_L(x_1, t) \phi_R(x_2, t) \phi_R^*(x_1, t) \phi_L^*(x_2, t)]$$

$$\begin{aligned} &= 2\operatorname{Re} \left[\left(\frac{2}{\pi S^2} \right) \left\{ \frac{1}{(1+[2\hbar t/mS^2]^2)} \right\} \right. \\ &\quad \exp \left\{ i\hbar k^2 t/2m - (x_1 + [\ell/2 - \hbar kt/m])^2/(S^2 + 2i\hbar t/m) + ik(x_1 + [\ell/2 - \hbar kt/m]) \right\} \\ &\quad \exp \left\{ i\hbar k^2 t/2m - (x_2 - [\ell/2 - \hbar kt/m])^2/(S^2 + 2i\hbar t/m) - ik(x_2 - [\ell/2 - \hbar kt/m]) \right\} \\ &\quad \exp \left\{ -i\hbar k^2 t/2m - (x_1 - [\ell/2 - \hbar kt/m])^2/(S^2 - 2i\hbar t/m) + ik(x_1 - [\ell/2 - \hbar kt/m]) \right\} \\ &\quad \left. \exp \left\{ -i\hbar k^2 t/2m - (x_2 + [\ell/2 - \hbar kt/m])^2/(S^2 - 2i\hbar t/m) - ik(x_2 + [\ell/2 - \hbar kt/m]) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2}{\pi S^2} \right) \left\{ \frac{1}{(1+[2\tau]^2)} \right\} \\ &\quad \exp \left\{ -2(x_1^2 + x_2^2 + 2[\ell/2 - \hbar kt/m]^2) / \{S^2(1+[2\tau]^2)\} \right\} \\ &\quad 2\cos \left([2k + 4(\ell/2 - \hbar kt/m)(2\tau) / \{S^2(1+[2\tau]^2)\}] (x_1 - x_2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{周期} &= 2\pi / [2k + 4(\ell/2 - \hbar kt/m)(2\tau) / \{S^2(1+[2\tau]^2)\}] \\ &= \pi / [k / (1+[2\tau]^2) + \ell[2\tau] / \{S^2(1+[2\tau]^2)\}] \end{aligned}$$

● $\tau = \hbar t/mS^2$ …無次元の量、無次元化した時間

6. $P_{2\text{個検出}}(x_1, x_2)$ のグラフ

最後の式の第2項は
古典的な確率密度波には無い項、

すなわち量子力学ならではの干渉項である。

以下、この干渉項の影響により

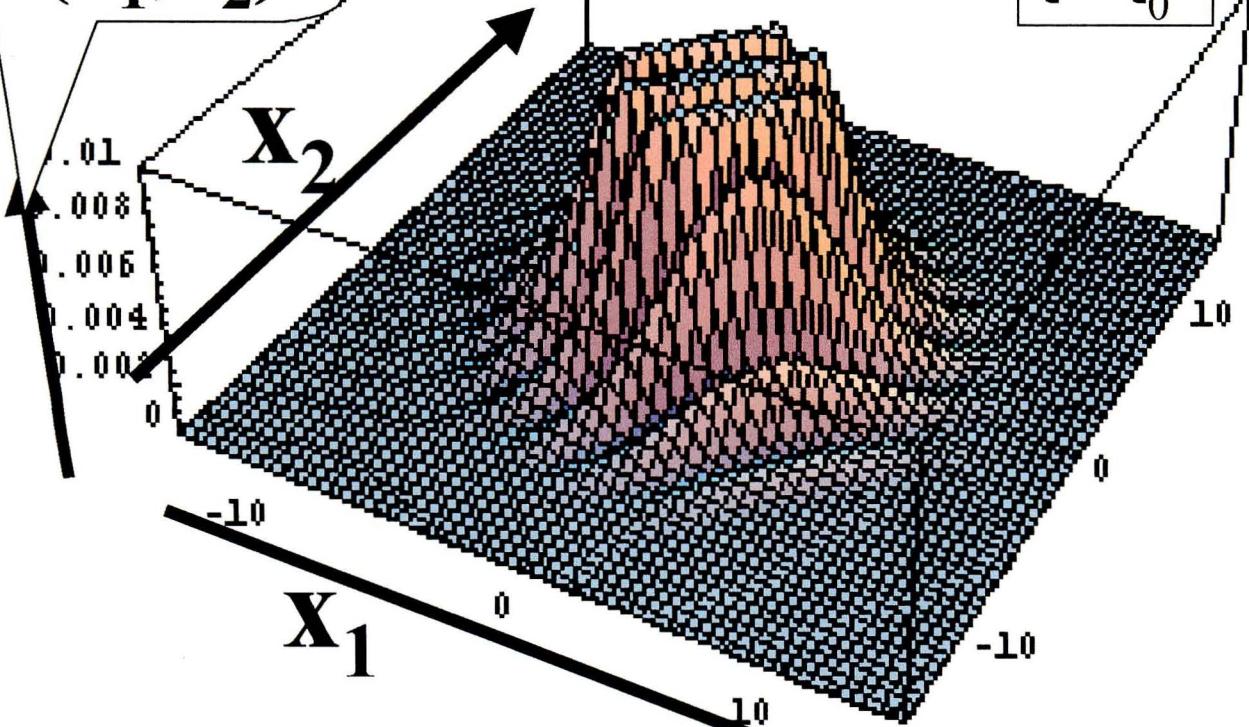
2点測定の確率分布 $P_{(x_1, x_2)}$ に
どのような干渉パターンが見えるかを
シミュレーションで調べてみる

今回は特に

広がる効果のみが存在する状況、
 k を0ととったものをお見せします

$P(x_1, x_2)$

$t = t_0$



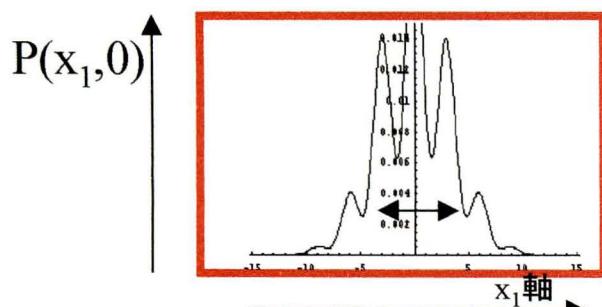
$P(x_1, x_2)$ を山の高さで表す

x_2 一定の断面で表す

$P(x_1, x_2)$ を密度で表す

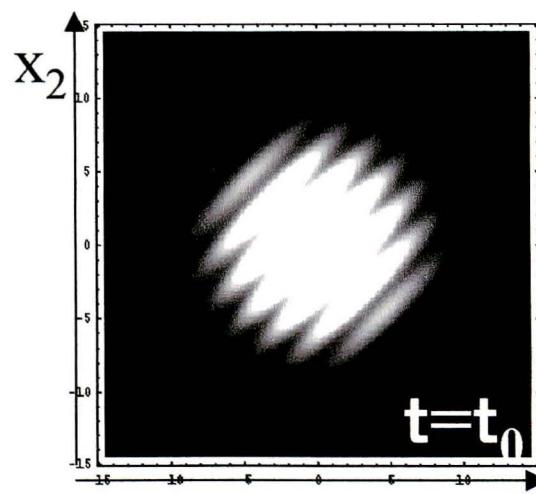
$x_2=0$

$T=t_0$



Peakの詳細が分かる

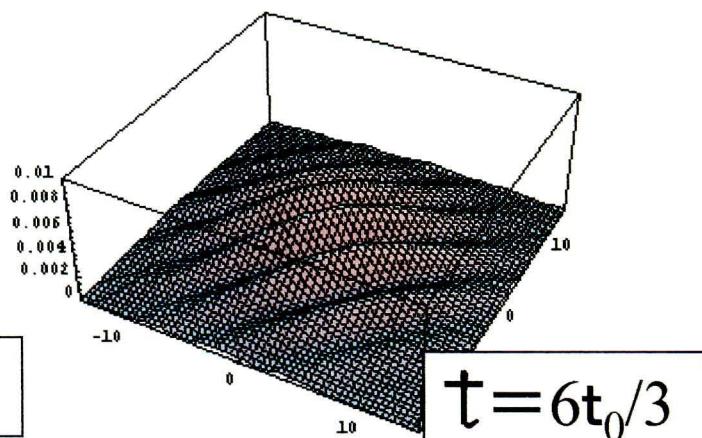
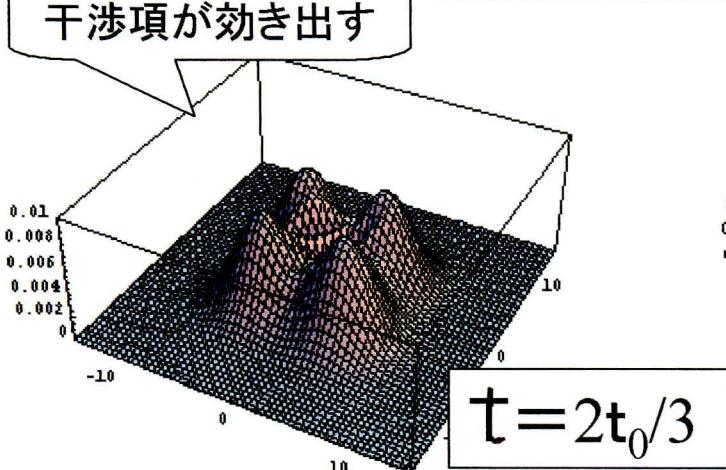
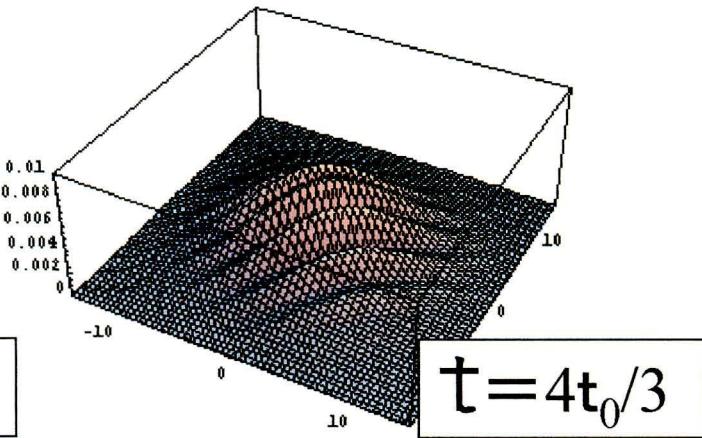
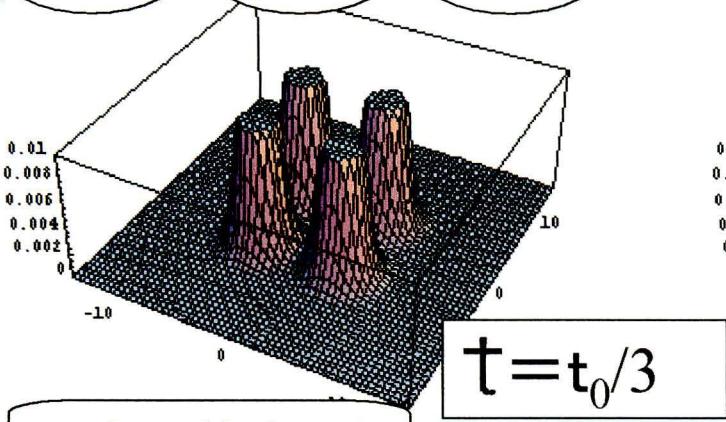
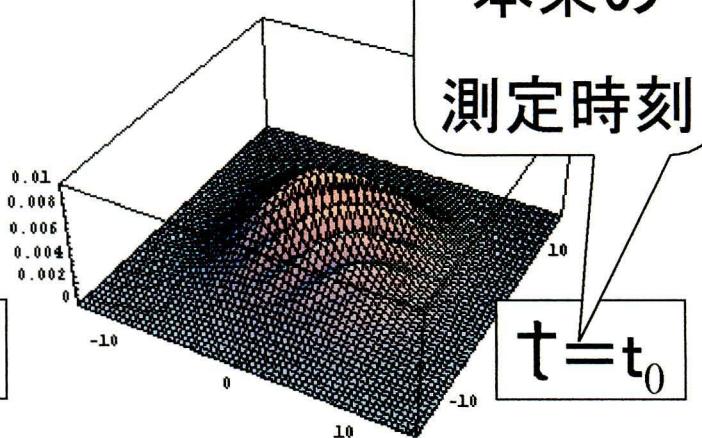
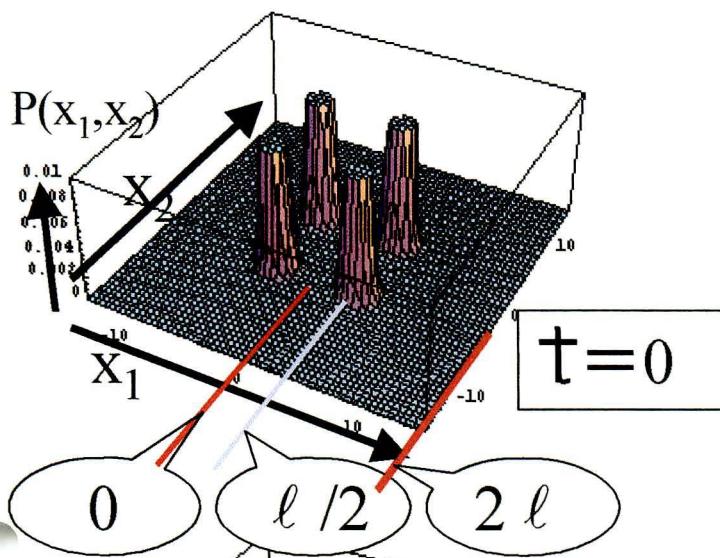
全体的な分布が分かる



(x_1, x_2) 空間で $P(x_1, x_2)$ を Plot(3D) $k=0$

本来の

測定時刻

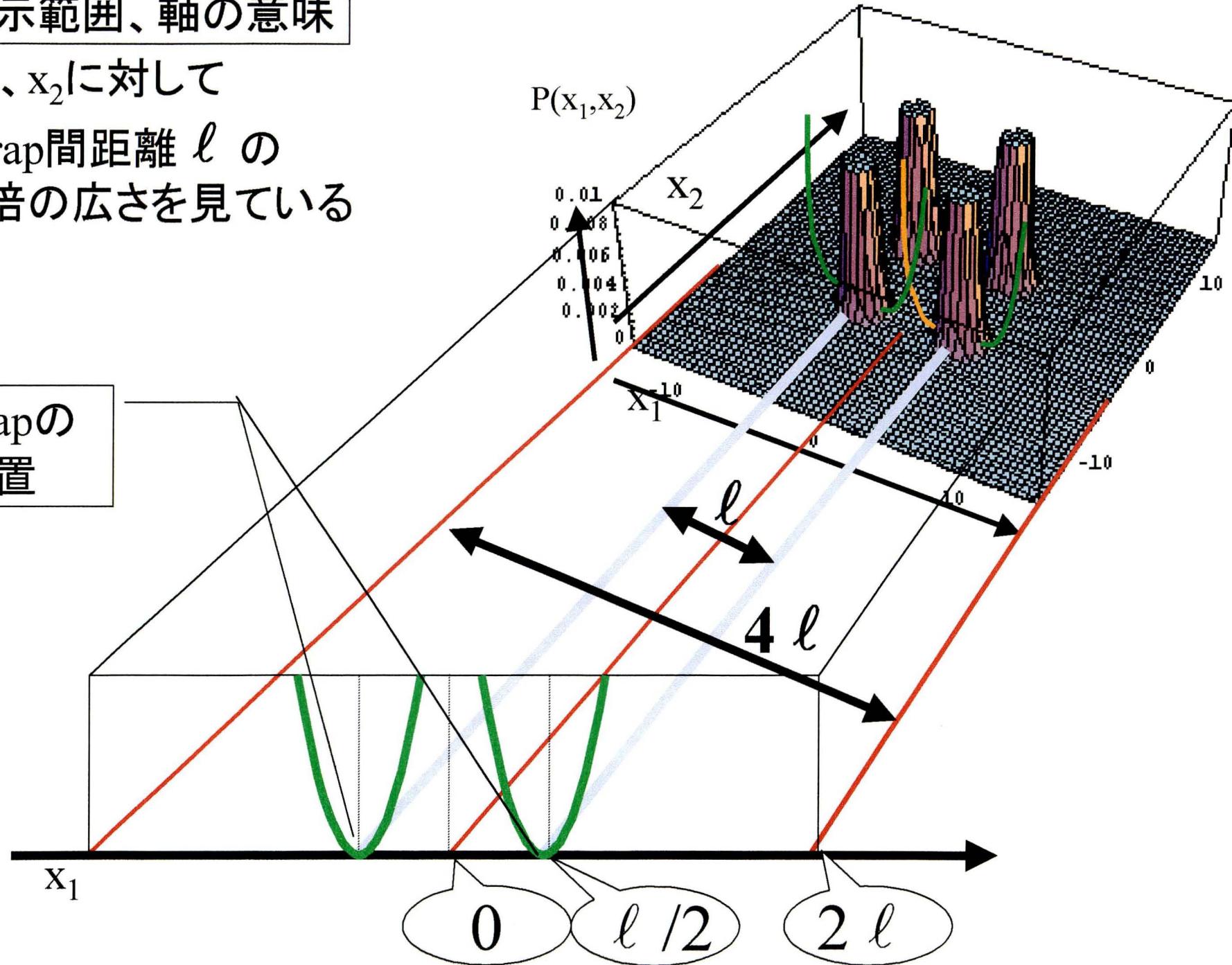


この図は幾つかのサンプルタイムに測定したらどう見えるかを示したもの。
連続測定ではない。

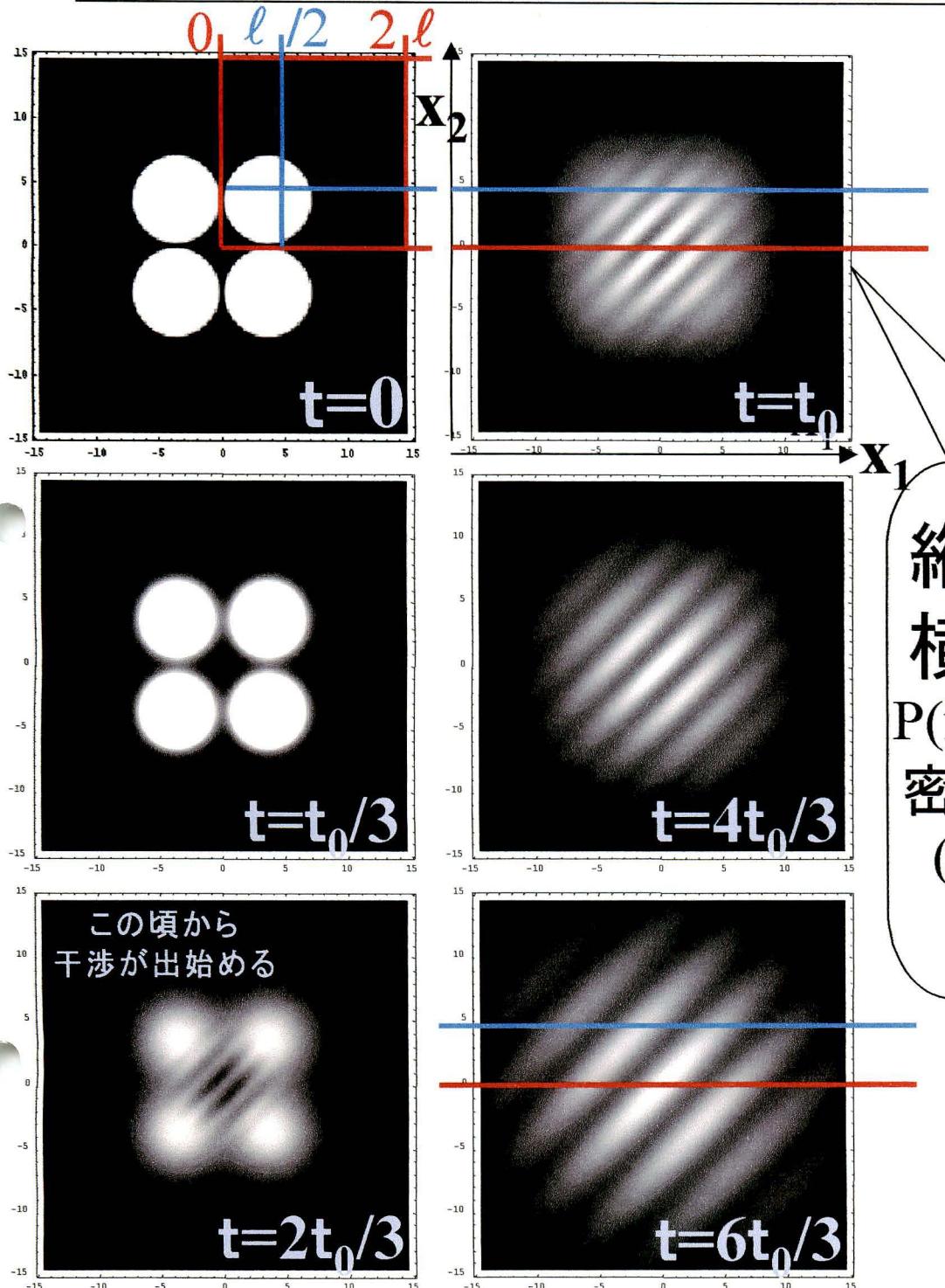
表示範囲、軸の意味

x_1, x_2 に対して
Trap間距離 ℓ の
4倍の広さを見ている

Trapの
位置



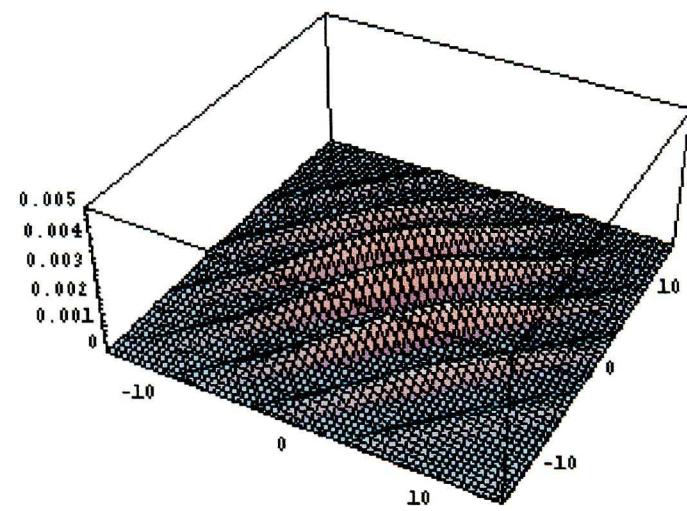
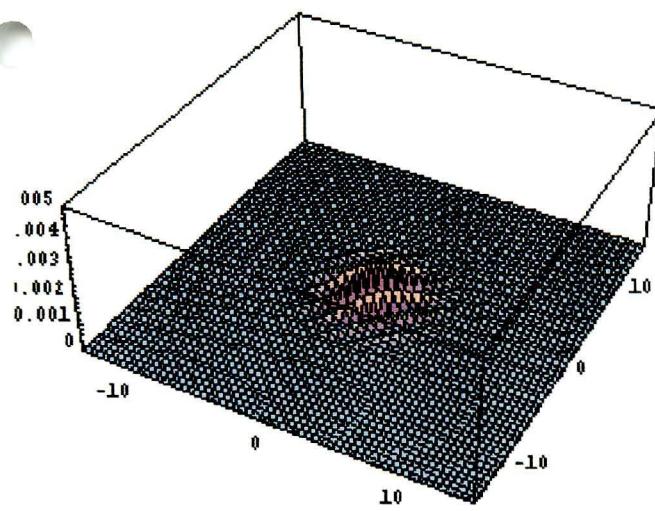
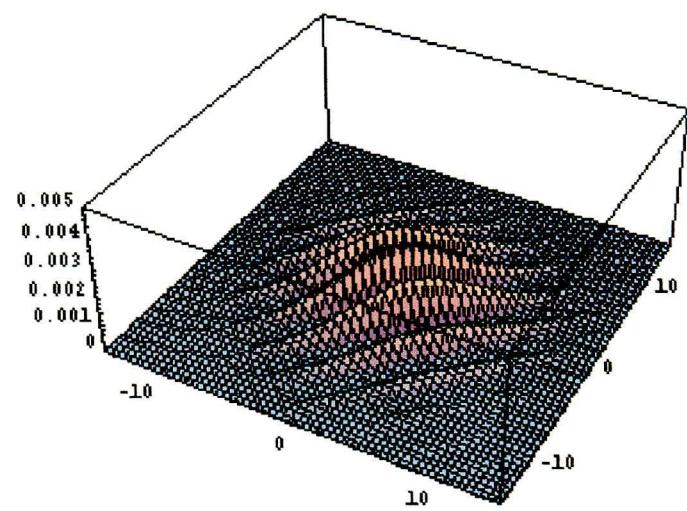
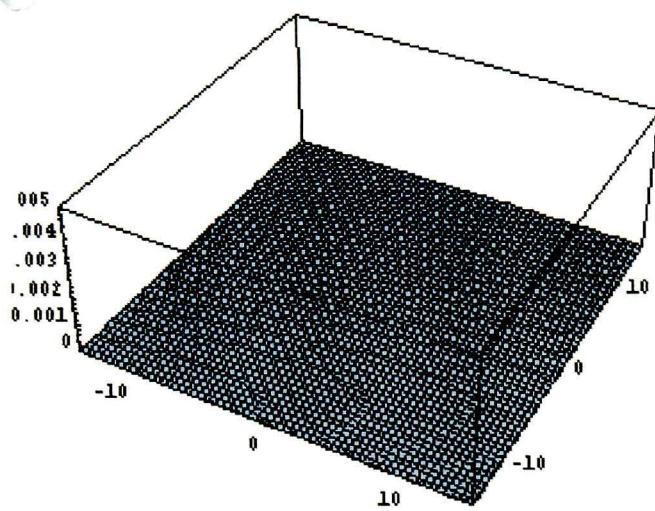
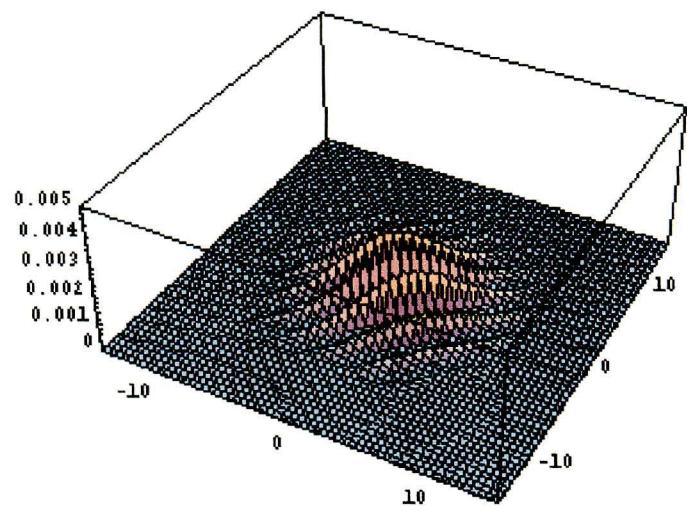
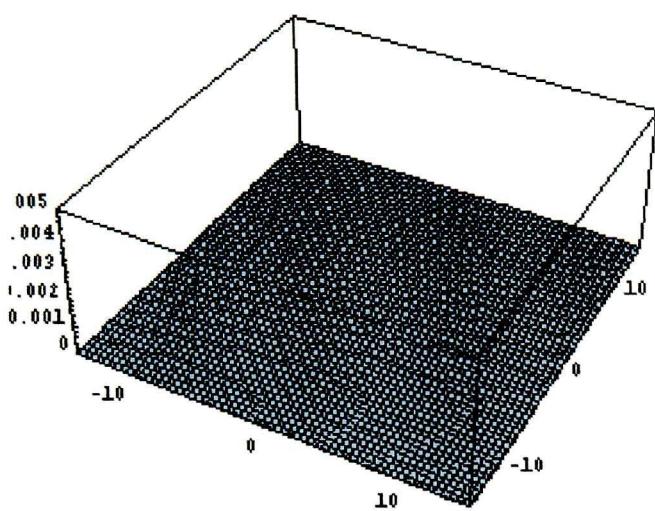
(x_1, x_2) 空間で $P(x_1, x_2)$ を Plot (dens) $k=0$

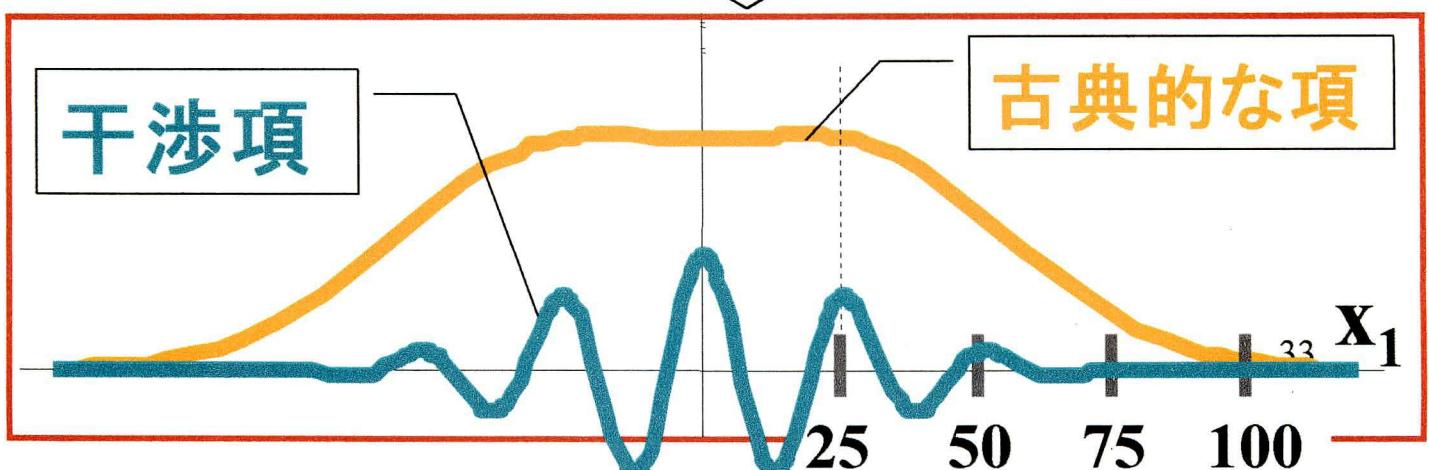
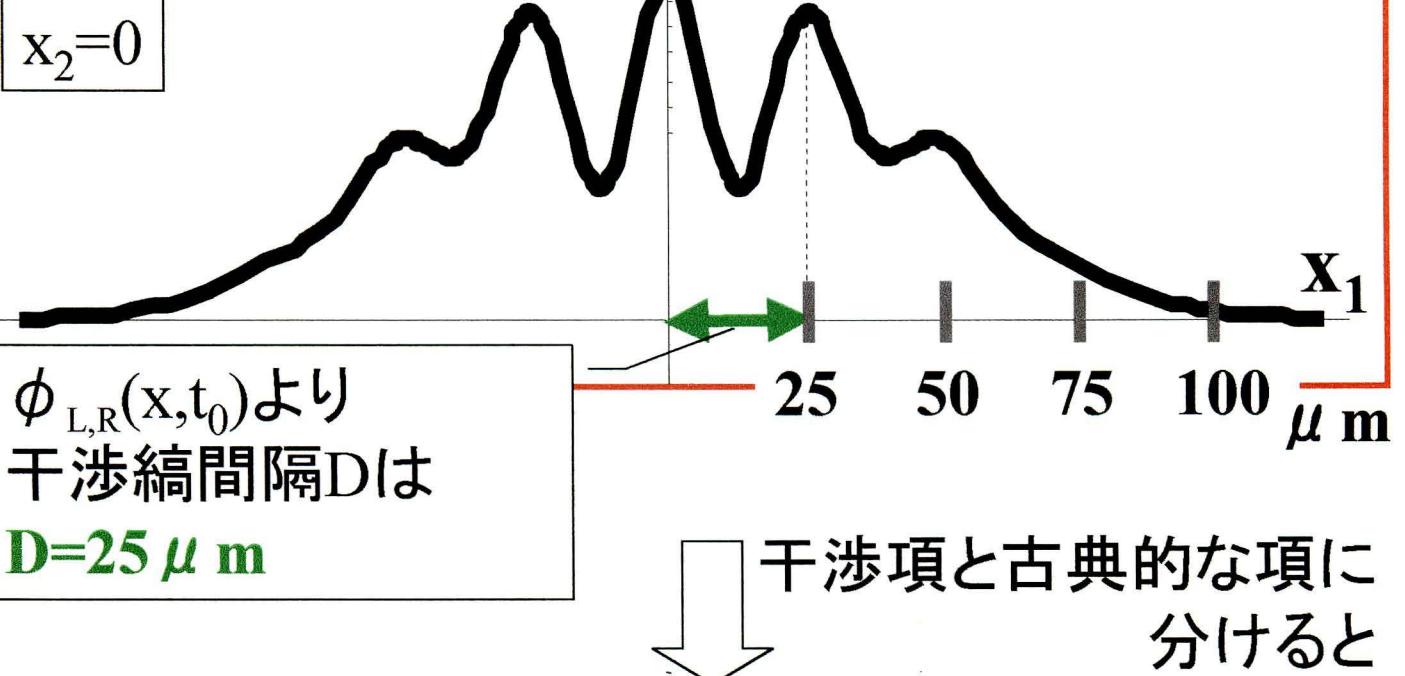
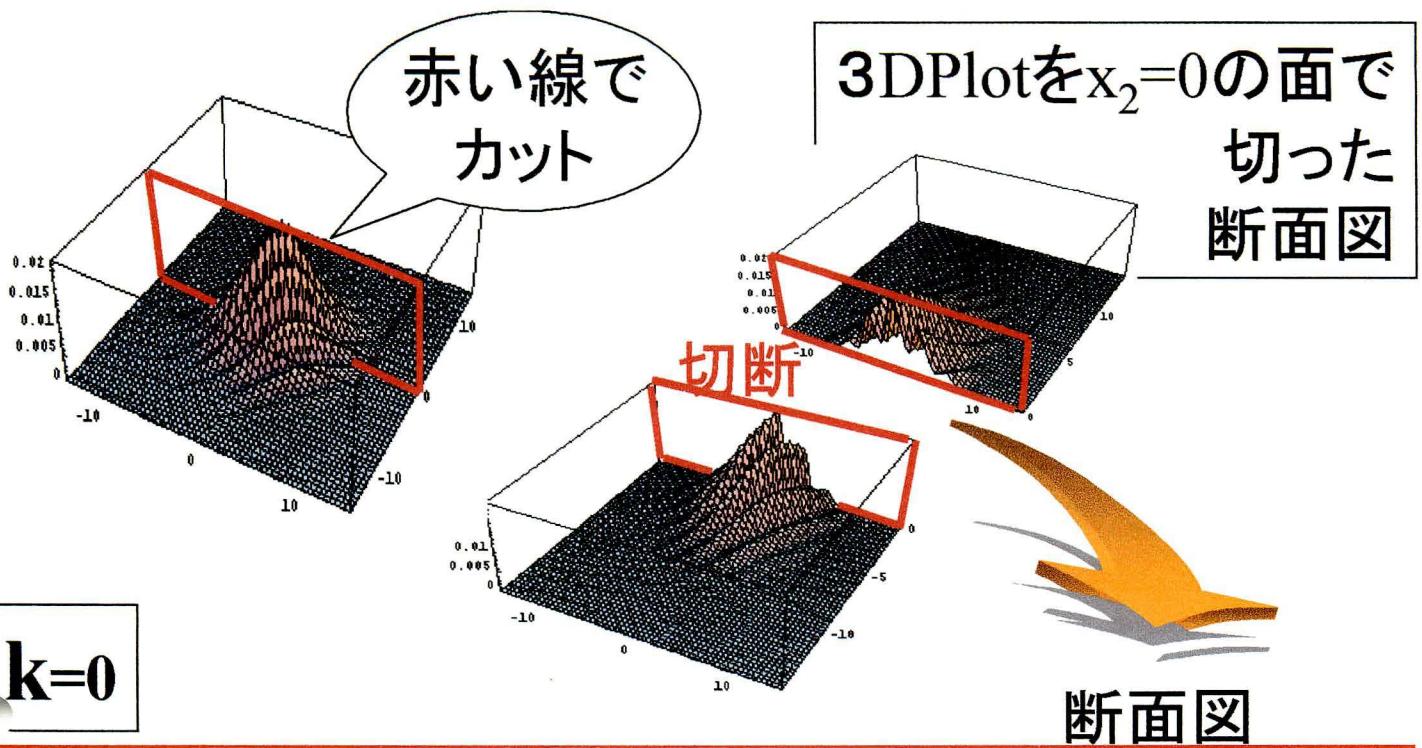


この図から読み取れること

- 1, 時間と共に縞の周期が長くなる
- 2, 同一時刻では x_2 をどの値にfixしても $P(x_1)$ を見ても周期は同じになる

(x_1, x_2) 空間で干渉項をPlot(3D) $k=0$





7. 2点測定の示すものと 実験の関係

- 2点測定…2点でのみ粒子が検出された場合の確率分布である。
- 実験…… N のオーダーの数(M 個とする), 粒子が検出される。 今のモデルでcounterを M 個用いた確率分布が 実験のパターンと対応するもの

では、この2点測定からは何が言えたのか?

- $t=t_0, x_2=0$ ととった時、($\phi(x)$ の具体式より)
 $P(x_1, 0)$ はpeakの周期は約 $25 \mu m$
- そのグラフのpeakは、
2,3つ目くらいからは低い
↓
- • 非常に粗く言えば
ある1つの原子の近くには、
近接しているか、 $25 \mu m$ の
距離に他の原子が居やすい
↓
- • 更に別の原子も距離 $0, 25 \mu m$ に
居やすいと考えるなら
測定にかかるM個の原子の位置は
 $25 \mu m$ の間隔をもつと予想される

メモ 真中のピークの高さのオーダーは
 $\{(2/\pi S^2)^{1/4}\}^4 = 2/\pi S^2$ である。

- このモデルから予言する干渉縞間隔D
約25 [μm]
- Andrewsらが実験で得たパターンの干渉縞間隔
15 [μm]
 - 非常に簡単化されたモデルの割には
実験値と同じオーダーの値を得られた

このことより、
このモデルは実験の
本質についているものと考えられる

では逆に、Dとして15 μm を与えるのは
Sの見積もりとして
どのような値をとった時か？

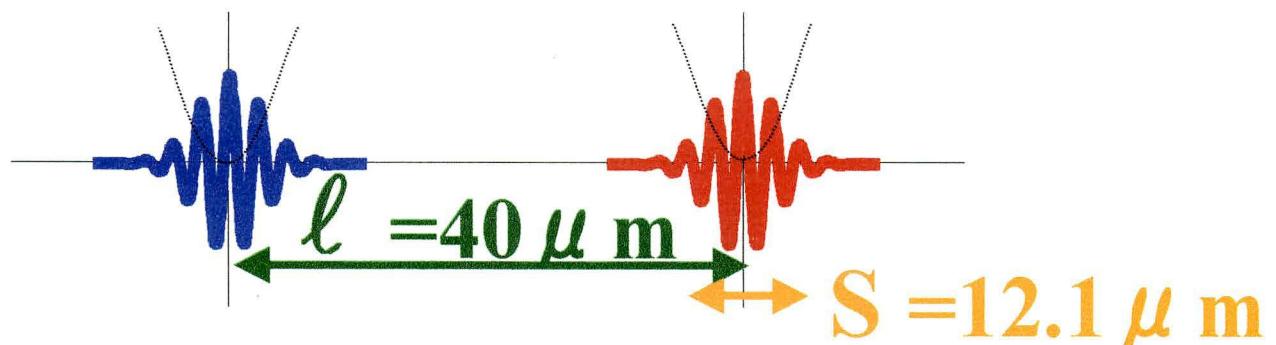
何が干渉縞の間隔Dを決定しているのか

k=0での干渉縞間隔D

$$D = \frac{\pi S^2 \{ 1 + (2t/\tau)^2 \}}{\ell (2t/\tau)}$$

$$\tau = mS^2 / \hbar = 53 \text{m秒}$$

メモ Sと ℓ の意味

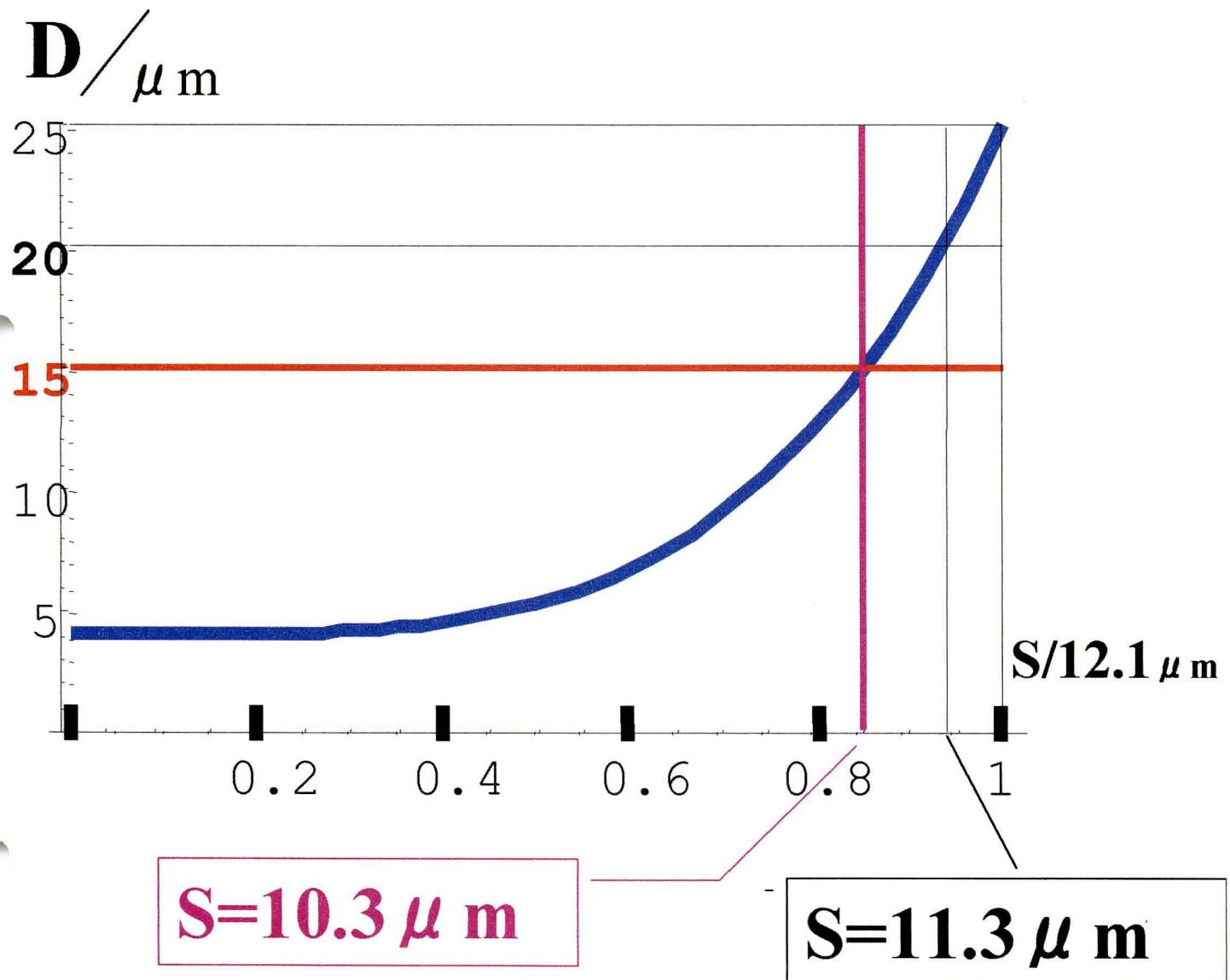


k=0の状況でもDは有限の大きさを持つ
以下に、DのS及び、時刻依存性をPlotして見てみる

Sの見積もりを変えた時のDの値

k=0

$$D(s) = \{ 4.03 + 21.0 \times (S/12.1 \mu m)^4 \} \mu m$$



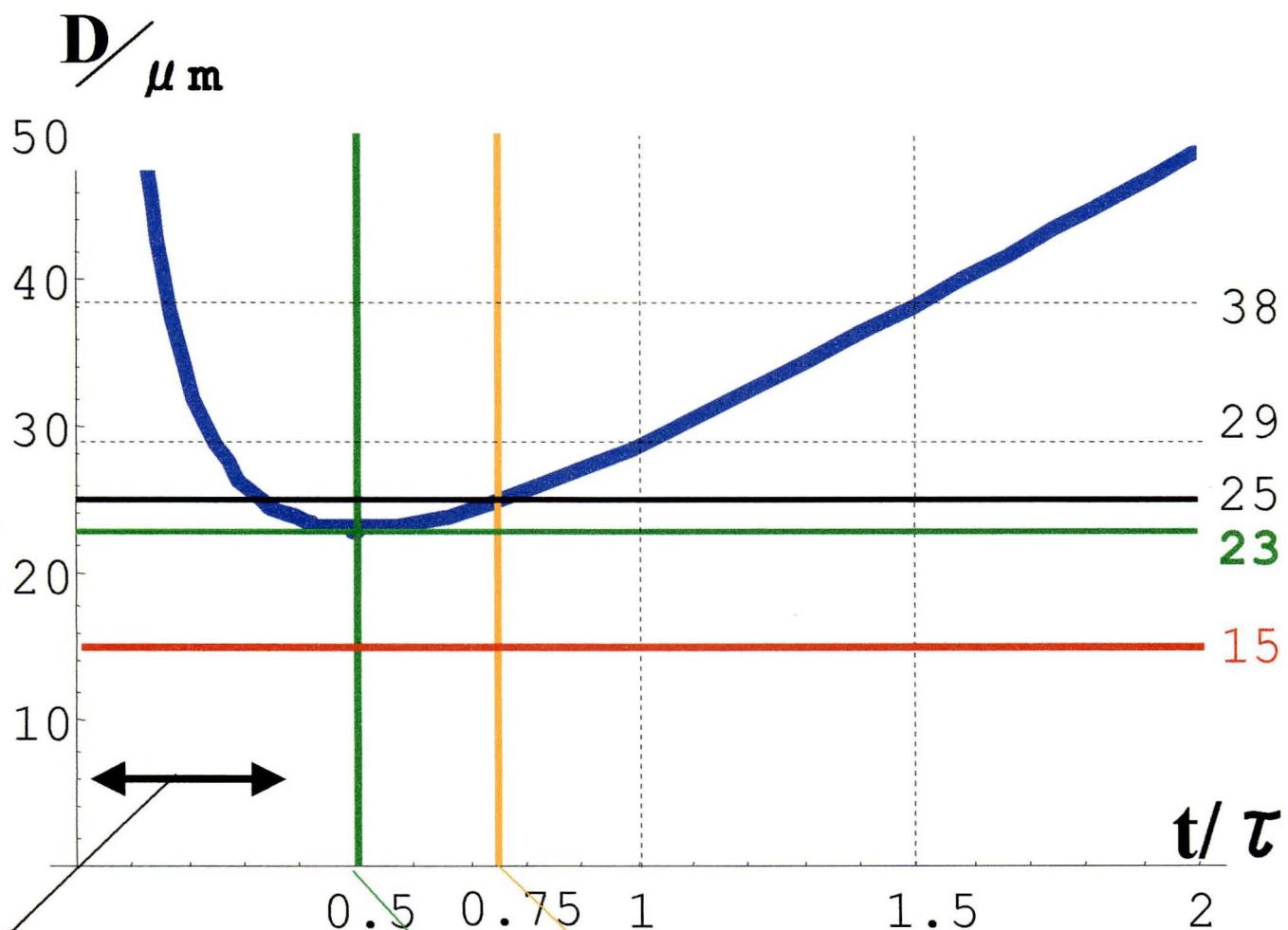
Sの見積もりが $10 \mu m$ 程度なら
Dは大体、**実験値**のオーダー

今回の s の見積もりは、オーダー程度の精度しかない³⁸
Sの見積もりは trap の詳細な情報を

非公開 手元の資料

- 何が干渉縞の間隔を決定しているのか
↓
- DのS依存性を見ると分かる通り
最初にぎゅっと狭いtrapにtrapされていた場合ほど、
干渉縞間隔は狭くなる。
- これはGaussianは自由なHamiltonianのもとで
- 広がっていく場合、
その広がる速さは
初めの広がりが小さいほど早い
ということを反映。
- また、2つのtrapの距離にも依存。
離れているほどDは小さくなる。
-
- $$D = \frac{\pi S^2 \{1 + (2t/\tau)^2\}}{\ell (2t/\tau)}$$
- $\tau = mS^2/\hbar = 53 \mu\text{秒}$
- $t_0 = 40 \mu\text{秒}$
- $2t_0/\tau = 1.51$

各時刻での干渉縞間隔D $k=0$



この頃は
干渉項の振幅が
非常に小さいため、
干渉縞は
測定では見えない

最小値の時刻
 $\tau/2 = 27\text{ms}$

8. このモデルから 予言されること

モデルでは、
kがnon-zeroの状況も議論できる。
その時のDは以下

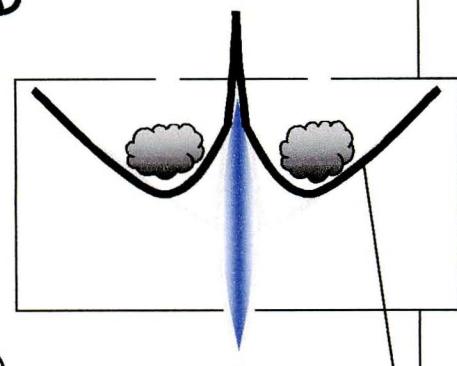
$$D = \frac{\pi}{\frac{k}{1 + (2t/\tau)^2} + \frac{\ell 2t/\tau}{S^2 \{ 1 + (2t/\tau)^2 \}}}$$
$$\dots \tau = mS^2/\hbar$$

- このモデルでは干渉縞間隔Dは
 S, t, k, ℓ に依存している。⁴⁰

$$D = \frac{\pi}{\frac{k}{1+(2t/\tau)^2} + \frac{\ell 2t/\tau}{S^2 \{ 1+(2t/\tau)^2 \}}}$$

... $\tau = mS^2/\hbar$

- 先に述べた S 依存性
⇒ trap の形をもっとタイトに
- 先に述べた t 依存性.
⇒ 異なる観測時刻で干渉縞のデータを比較
- k 依存性
⇒ 2つの trap を隔てる Laser の切るタイミングを変える
- ℓ 依存性
⇒ 2つの trap を隔てる Laser の強度を変える (これは見られている)



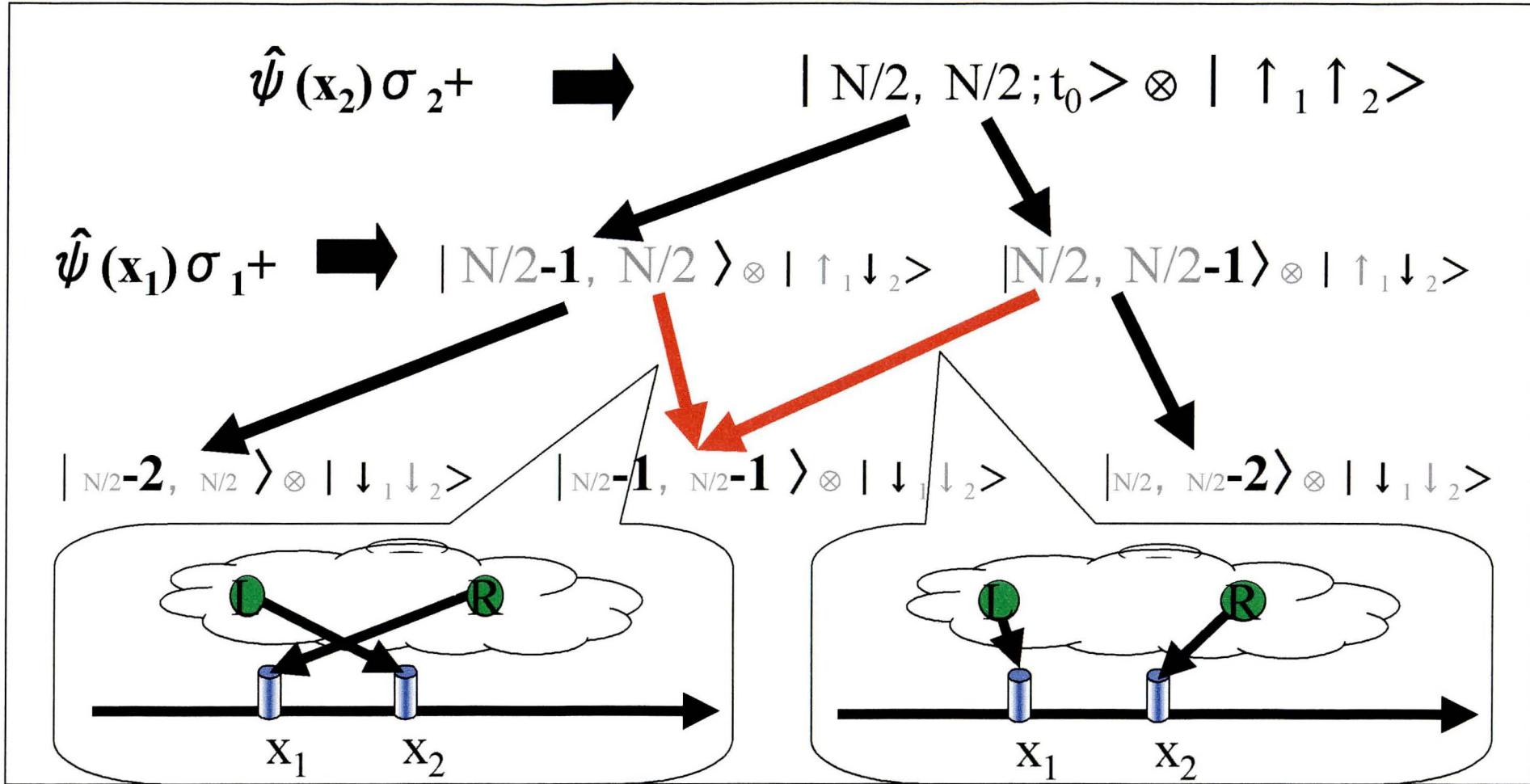
おわんと laser を
合わせた potential

9. まとめ

なぜ相関の無いボーズ凝縮体は
干渉縞を生じたのか

- これを見るため、
先の計算の本質だけ抜き出して書き表す

- どのようにして干渉が起きたか。



(Castinら('97)が既に述べている通り)

どのcounterに、どっちのBECの原子が入ったか、
というのは区別できない。

そのため、その状態に行きつく異なる観測のプロセス同士が
干渉を起こしている。(つまり基本は2粒子干渉と同じ)

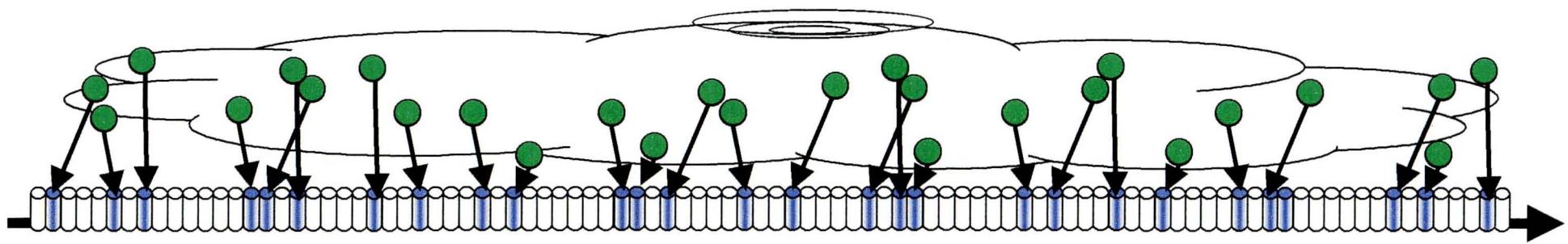
結論

別々に用意された
ボーズ凝縮体の干渉は
ボーズ凝縮体ならではの
不思議な現象ではなかった。

この現象の原因是、
“同種粒子は原理的に区別できない”
ということを反映した、古くより
2粒子干渉として知られる
“観測の過程”同士の干渉であった。

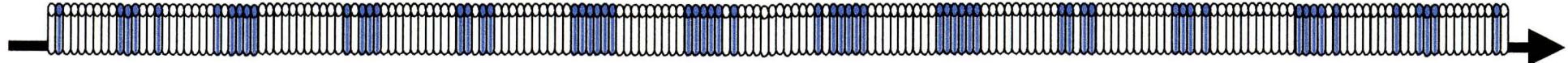
10. 課題

- 実験ではNのオーダーの数の粒子を検出している。
今回用いたモデルのcounterの数を増やして、本来の数だけ検出した状況を調べたい。



予想

flipするcounterが、どのような配置の場合に高確率であるかを調べると、



このように、flipするcounterが周期的に局在しているようなものがランダムなものに比べて非常に高確率で出現するのではないだろうか。

そしてそのような高確率なものが幾つかあって、実験でその内のどれかが実現するものと思われる。

その各々は同じ周期を取っているが局在する位置は1周期程度のずれがあるものと予想される。

これが実験のシングルランごとの干渉縞のシフトに対応するのだろう。